

1 Boîte à outils

Table des matières

Chapitre 1 : Boîte à outils	1
1.1 Combinatoire	2
1.1 Factorielle, arrangements et combinaisons	2
1.2 Triangle de Pascal	3
1.3 Binôme de Newton	4
1.2 Raisonnement par récurrence	4
1.3 Suites numériques	6
3.1 Suites arithmétiques et géométriques	8
3.2 Limite d'une suite	12
1.4 Séries numériques	14
4.1 Séries finies	14
4.2 Séries infinies	16
4.3 Somme d'une série géométrique	20

1 Combinatoire

1.1 Factorielle, arrangements et combinaisons

Définition 1 (Factorielle)

On définit la factorielle d'un nombre $n \in \mathbb{N}$ comme le produit de tous les nombres de 1 jusqu'à n :

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1,$$

On note ce nombre $n!$, ce qui donne de manière abrégée :

$$n! = \prod_{i=1}^n i.$$

Remarques

- Par convention $0! = 1$.
- La fonction Γ d'Euler permet d'étendre la factorielle aux réels positifs : $n! = \Gamma(n + 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 2 (Arrangement)

On note A_n^k le nombre de k -tuples ordonnés sans répétition que l'on peut former avec n éléments. Pour $0 \leq k \leq n$,

$$A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

Définition 3 (Combinaison)

On note C_k^n le nombre de sous-ensembles de cardinal k que l'on peut former avec un ensemble de cardinal n . Pour $0 \leq k \leq n$,

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Formule 1

On a

$$C_k^n = C_{n-k}^n$$

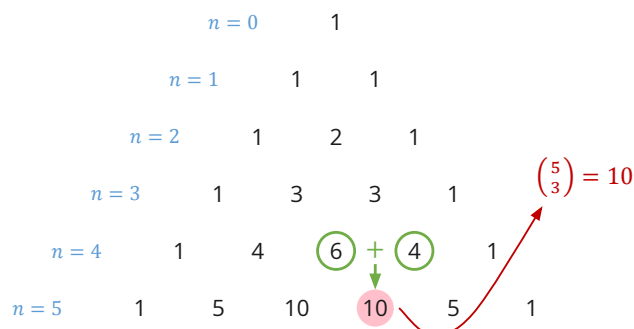
 **Série 1** · exercices 1 à 4

1.2 Triangle de Pascal

Définition 4 (Triangle de Pascal)

Le triangle de Pascal est construit de la manière suivante :

- son sommet vaut 1 ;
- les nombres situés sur les bords valent 1 ;
- chaque autre nombre est la somme des deux nombres placés juste au-dessus.



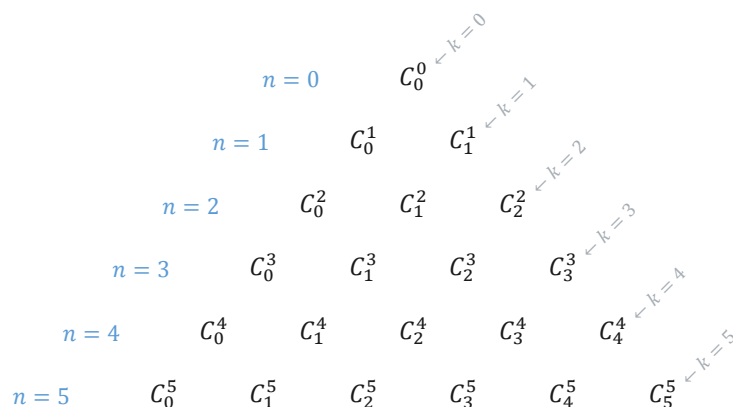
Le nombre situé à la ligne n et au rang k est le coefficient binomial C_k^n .

Pour $1 \leq k \leq n$, ces coefficients vérifient

$$C_k^{n+1} = C_{k-1}^n + C_k^n.$$

La somme des coefficients de la ligne n vaut

$$\sum_{k=0}^n C_k^n = 2^n.$$



Plusieurs autres propriétés seront démontrées en exercices.

Propriétés (Triangle de Pascal)

a) $C_k^n = \frac{n-k+1}{k} \cdot C_{k-1}^n$

b) $\sum_{k=r}^n C_r^k = C_{r+1}^{n+1}$ (sommes des coefficients diagonaux)

🌊 **Série 1** · exercices 5 à 6

🌊 **Série 2** · exercices 1 à 2

1.3 Binôme de Newton

Formule 2 (Binôme de Newton)

On a

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n a^k b^{n-k}$$

→ **Série 1** · exercices 7 à 9

→ **Série 2** · exercices 3 à 5

2 Raisonnement par récurrence

La preuve par récurrence est un mécanisme qui permet de démontrer un résultat. Elle doit être appliquée de la manière suivante :

Définition 5 (preuve par récurrence)

On commence avec une assertion $P(n)$ qui dépend de $n \in \mathbb{N}$.

On veut montrer que $P(n)$ est vraie $\forall n \geq n_0$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$ (on aura souvent que $n \geq 0$ ou $n \geq 1$).

1. Ancrage (ou initialisation) :

on montre que $P(n_0)$ est vraie.

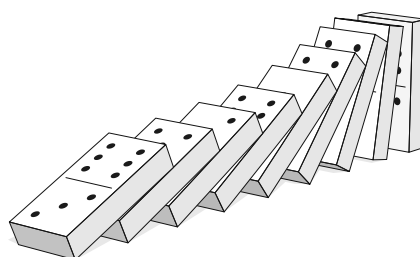
2. Pas de récurrence (ou hérédité):

on suppose $P(m)$ vraie (induction faible) ou $P(k)$ est vraie $\forall k \leq m$ (induction forte). On montre que $P(m + 1)$ est vraie.

Si cela est vérifié, alors $P(n)$ est vraie $\forall n \geq n_0$.

Remarques

- On peut comparer une démonstration par récurrence comme faire tomber une série de dominos. L'ancrage est l'impulsion qu'on donne au fil de la chute et le pas de récurrence représente chaque pièce qui entraîne la suivante dans sa chute.
- $P(n)$ est appelée l'hypothèse de récurrence.



Exemple 1 (Une première formule)

Démontrons par récurrence que

$$n! \leq n^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ancrage. Pour $n = 1$, on a $1! \leq 1^1 \Leftrightarrow 1 \leq 1$ Vrai.

Hérédité. Supposons que $n! \leq n^n$ pour un certain $n \geq 1$. Alors

$$(n + 1)! = (n + 1)n! \leq (n + 1)n^n \leq (n + 1)(n + 1)^n = (n + 1)^{n+1}.$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 2 (Inégalité de Bernoulli)

Démontrons par récurrence que

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \geq -1.$$

Ancrage. Pour $n = 0$, on a $(1+x)^0 = 1 = 1+0x$.

Hérédité. Supposons que $(1+x)^n \geq 1+nx$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Comme $1+x \geq 0$,

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x. \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3 (La somme des nombres impairs)

Considérons les sommes suivantes :

$$\begin{aligned} 1+3 &= 4 = 2^2, \\ 1+3+5 &= 9 = 3^2, \\ 1+3+5+7 &= 16 = 4^2, \\ 1+3+5+7+9 &= 25 = 5^2. \end{aligned}$$

On constate que le résultat semble toujours égal au carré du nombre de termes. On peut donc formuler la proposition

$$P(n) : 1+3+5+\dots+(2n-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Démontrons cette proposition par récurrence pour $n \geq 1$.

Ancrage. Pour $n = 1$,

$$\sum_{k=1}^1 (2k-1) = 1 = 1^2.$$

La proposition $P(1)$ est donc vraie.

Hypothèse de récurrence. Soit $n \geq 1$. Supposons que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

Hérédité. Vérifions alors la proposition au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) &= \underbrace{\sum_{k=1}^n (2k-1)}_{=n^2 \text{ par hypothèse de récurrence}} + [2(n+1)-1] \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

La proposition $P(n+1)$ est donc vraie. Par récurrence,

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

3 Suites numériques

Définition 6 (Suite réelle)

Une suite réelle est une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. À chaque entier naturel $n \in I$, elle associe un nombre réel u_n , appelé le *terme de rang n* .

La suite est notée

$$(u_n)_{n \in I} \quad \text{ou plus simplement} \quad (u_n).$$

Lorsque l'ensemble des indices I est fini, on parle de *suite finie*.

Pour définir entièrement une suite, on peut notamment :

- donner directement son terme général u_n en fonction de n ;
- donner son premier terme, ou ses premiers termes, ainsi qu'une relation de récurrence permettant de calculer les suivants.

En pratique 1 (Calculer les premiers termes d'une suite)

Dans chaque cas, déterminer les dix premiers termes de la suite.

- | | |
|--|--|
| a) $u_n = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$; | b) $u_n = \frac{n+1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; |
| c) $u_n = 1 + (-1)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$; | d) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ |
| e) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_{n-1} - u_n \end{cases}$ pour tout $n \geq 2$. | |

Définition 7 (Signe d'une suite)

Une suite (u_n) est :

- | | |
|---|---|
| • <i>positive</i> si $u_n \geq 0, \forall n$; | • <i>négative</i> si $u_n \leq 0, \forall n$; |
| • <i>strictement positive</i> si $u_n > 0, \forall n$; | • <i>strictement négative</i> si $u_n < 0, \forall n$. |

Définition 8 (Monotonie d'une suite)

Une suite (u_n) est :

- | | |
|---|---|
| • <i>croissante</i> si $u_n \leq u_{n+1}, \forall n$; | • <i>décroissante</i> si $u_n \geq u_{n+1}, \forall n$; |
| • <i>strictement croissante</i> si $u_n < u_{n+1}, \forall n$; | • <i>strictement décroissante</i> si $u_n > u_{n+1}, \forall n$. |

Remarques

La présence du quantificateur « pour tout » est essentielle : comparer seulement quelques termes ne suffit pas pour démontrer la monotonie d'une suite.

Définition 9 (Suites bornées)

Une suite (u_n) est *majorée* s'il existe un nombre réel M tel que

$$u_n \leq M \quad \text{pour tout indice } n.$$

Le nombre M est alors appelé un *majorant* de la suite. Le plus petit de ses majorants, s'il existe, est appelé sa *borne supérieure*.

Une suite (u_n) est *minorée* s'il existe un nombre réel m tel que

$$m \leq u_n \quad \text{pour tout indice } n.$$

Le nombre m est alors appelé un *minorant* de la suite. Le plus grand de ses minorants, s'il existe, est appelé sa *borne inférieure*.

Une suite est *bornée* lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques

- On admettra sans démonstration que toute suite majorée possède un plus petit majorant et que toute suite minorée possède un plus grand minorant.
- Trouver la meilleure borne d'une suite peut être délicat. Par exemple, quelle est la borne supérieure de la suite définie par

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_n = u_{n-1} + n \cdot 10^{1-n}, \quad n \geq 2?$$

Exemple 4 (Une suite décroissante et bornée)

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \frac{3n-1}{5n-2}.$$

Pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{(5n+3)(5n-2)} < 0.$$

La suite est donc strictement décroissante. Elle est ainsi majorée par son premier terme

$$u_1 = \frac{2}{3}.$$

De plus,

$$u_n > 0.$$

La suite est donc minorée par 0. En réalité, sa borne inférieure est $\frac{3}{5}$.

Exemple 5 (Une suite croissante et bornée)

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = 1 - \frac{1}{2n}.$$

Pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n(n+1)} > 0.$$

La suite est donc strictement croissante. Elle est ainsi minorée par son premier terme

$$u_1 = \frac{1}{2}.$$

Enfin,

$$1 - u_n = \frac{1}{2n} > 0.$$

La suite est donc majorée par 1, qui est également sa borne supérieure.

En pratique 2 (Construire des exemples de suites)

Donner un exemple de suite :

- qui n'est ni majorée ni minorée ;
- qui n'est ni croissante ni décroissante, mais qui est bornée.

3.1 Suites arithmétiques et géométriques

Définition 10 (Suite arithmétique)

Une suite arithmétique est une suite de nombres u_n , dits termes de la suite, telle que chaque terme est obtenu du précédent en lui ajoutant un nombre constant r , appelé raison de la suite :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

La raison peut être positive ou négative.

Définition 11 (Suite géométrique)

Une suite géométrique est une suite de nombres u_n , dits termes de la suite, telle que chaque terme est obtenu du précédent en le multipliant par un nombre constant r , appelé raison de la suite :

$$u_{n+1} = r \cdot u_n.$$

Exemple 6 (Comparer les deux types de suites)

La suite 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... est une suite arithmétique de raison 1. Voici un autre exemple de suite arithmétique, de raison -3 et de premier terme 10 :

$$10, \quad 7, \quad 4, \quad 1, \quad -2, \quad -5, \quad -8, \quad \dots$$

La suite 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... est une suite géométrique de raison 2.

En pratique 3 (Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique)

Dans chaque cas, déterminer si la suite est arithmétique ou géométrique, préciser sa raison, puis calculer ses six premiers termes.

- a) $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; b) $v_1 = 2$ et $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;
 c) $w_n = 5n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; d) $z_n = 3 \cdot 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.1.1 Calcul du terme de rang n

Propriété (Terme de rang n d'une suite arithmétique)

Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r , alors

$$u_n = u_1 + (n - 1)r.$$

Preuve. Posons $P(n) : u_n = u_1 + (n - 1)r$.

Ancrage. Pour $n = 1$,

$$u_1 = u_1 + (1 - 1)r = u_1.$$

Pas de récurrence. Supposons $P(n)$ vraie. Comme la suite est arithmétique,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + r \\ &= u_1 + (n - 1)r + r \\ &= u_1 + nr \\ &= u_1 + ((n + 1) - 1)r. \end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang $n + 1$, puis pour tout entier $n \geq 1$. □

Propriété (Terme de rang n d'une suite géométrique)

Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_1 et de raison r , alors

$$u_n = u_1 \cdot r^{n-1}.$$

Preuve. Posons $P(n) : u_n = u_1 r^{n-1}$.

Ancrage. Pour $n = 1$,

$$u_1 = u_1 r^0 = u_1.$$

Pas de récurrence. Supposons $P(n)$ vraie. Comme la suite est géométrique,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= r u_n \\ &= r u_1 r^{n-1} \\ &= u_1 r^n \\ &= u_1 r^{(n+1)-1}. \end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang $n + 1$, puis pour tout entier $n \geq 1$. □

Application à l'exemple 6 :

$$u_{100} = u_1 + (100 - 1) \cdot r = 0 + 99 \cdot 1 = 99.$$

$$v_{100} = v_1 \cdot r^{100-1} = 1 \cdot 2^{99} = 633825300114114700748351602688.$$

Exemple 7 (Déterminer des formules explicites)

Pour chacune des suites suivantes, trouver une formule explicite pour le n -ième terme de la suite.

a) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \dots$

b) $\frac{3}{4}, \frac{9}{7}, \frac{27}{10}, \frac{81}{13}, \frac{243}{16}, \dots$

Solution.

- a) D'abord, on remarque que la suite alterne du négatif au positif. Les termes impairs de la suite sont négatifs, et les termes pairs sont positifs. Par conséquent, le n -ième terme contient un facteur $(-1)^n$. Ensuite, considérons la suite des numérateurs (1; 2; 3; ...) et la suite des dénominateurs (2; 3; 4; ...). On voit que ces deux suites sont arithmétiques. Le n -ième terme de la suite des numérateurs est n , et le n -ième terme de la suite des dénominateurs est $n + 1$. Par conséquent, la suite peut être décrite par la formule explicite

$$u_n = \frac{(-1)^n n}{n + 1}.$$

- b) La suite des numérateurs (3; 9; 27; 81; 243; ...) est une suite géométrique. Le numérateur du n -ième terme est 3^n . La suite des dénominateurs (4; 7; 10; 13; 16; ...) est une suite arithmétique. Le dénominateur du n -ième terme est $4 + 3(n - 1) = 3n + 1$. Par conséquent, on peut décrire la suite par la formule explicite

$$u_n = \frac{3^n}{3n + 1}.$$

En pratique 4

Trouver une formule explicite pour le n -ième terme de la suite

$$\left(\frac{1}{5}; -\frac{1}{7}; \frac{1}{9}; -\frac{1}{11}; \dots \right).$$

Exemple 8 (Suites définies par des relations de récurrence)

Pour chacune des suites définies récursivement suivantes, trouver une formule explicite de la suite.

a) $u_1 = 2, \quad u_n = -3u_{n-1}$ pour $n \geq 2$

b) $u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_n = u_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour $n \geq 2$

Solution.

a) En écrivant les premiers termes, on obtient

$$u_1 = 2$$

$$u_2 = -3u_1 = -3 \cdot 2$$

$$u_3 = -3u_2 = (-3)^2 \cdot 2$$

$$u_4 = -3u_3 = (-3)^3 \cdot 2.$$

En général,

$$u_n = 2(-3)^{n-1}.$$

b) Écrivons les premiers termes :

$$u_1 = \frac{1}{2}$$

$$u_2 = u_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$u_3 = u_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$u_4 = u_3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{7}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

À partir de ce modèle, on obtient la formule explicite

$$u_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

En pratique 5

Trouver une formule explicite pour la suite définie récursivement par $u_1 = -4$ et $u_n = u_{n-1} + 6$.

 **Série 3** · exercices 1 à 4

3.1.2 Somme des k premiers termes d'une suite arithmétique

Considérons une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_1 et de raison r . Posons

$$S_k = \sum_{n=1}^k u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{k-1} + u_k.$$

Écrivons cette somme une première fois dans l'ordre croissant, puis une seconde fois dans l'ordre inverse :

$$S_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_{k-1} + u_k$$

$$S_k = u_k + u_{k-1} + \cdots + u_2 + u_1.$$

Dans chaque colonne, on additionne deux termes symétriques. Pour la n -ième colonne,

$$\begin{aligned}
 u_n + u_{k+1-n} &= (u_1 + (n-1)r) + (u_1 + (k-n)r) \\
 &= 2u_1 + (k-1)r \\
 &= u_1 + u_k.
 \end{aligned}$$

Ainsi, chacune des k colonnes donne le même résultat $u_1 + u_k$. On obtient donc

$$2S_k = k(u_1 + u_k) = k(2u_1 + (k-1)r).$$

Formule (Somme des k premiers termes d'une suite arithmétique)

$$S_k = \frac{k(u_1 + u_k)}{2} = \frac{k(2u_1 + (k-1)r)}{2}.$$

Autrement dit, on obtient la somme en multipliant par k la moyenne arithmétique du premier et du dernier terme.

 **Série 3** · exercices 14 à 15

3.1.3 Somme des k premiers termes d'une suite géométrique

Considérons une suite géométrique de premier terme a et de raison r . Posons

$$S_k = \sum_{n=1}^k ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{k-1}.$$

Si $r = 1$, alors $S_k = k \cdot a$. Si $r \neq 1$, multiplions la somme par $1 - r$:

$$\begin{aligned}
 (1-r)S_k &= a(1 + r + r^2 + \dots + r^{k-1}) - a(r + r^2 + \dots + r^k) \\
 &= a(1 - r^k).
 \end{aligned}$$

Tous les termes intermédiaires se simplifient. Ainsi,

Formule (Somme des k premiers termes d'une suite géométrique)

$$S_k = \begin{cases} \frac{a(1-r^k)}{1-r} & \text{si } r \neq 1 \\ k \cdot a & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

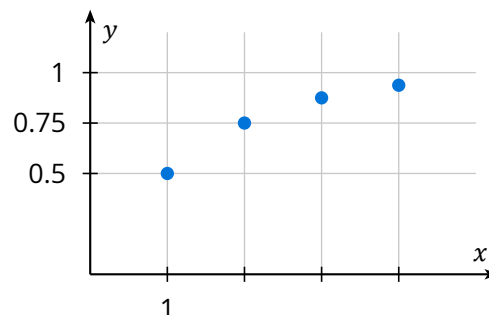
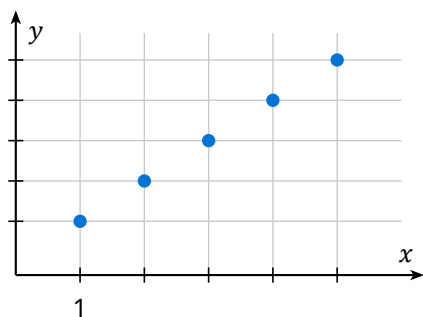
 **Série 3** · exercices 5 à 11

 **Série 4** · exercices 1 à 2

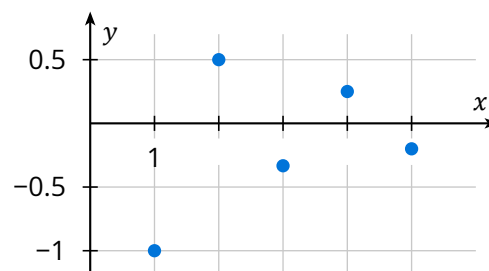
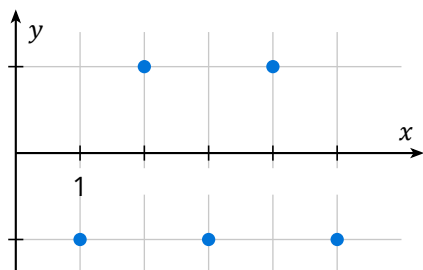
3.2 Limite d'une suite

Une question fondamentale qui concerne les suites infinies est le comportement des termes quand n devient grand. Comme une suite est une fonction définie sur les entiers naturels, il est logique de discuter de la limite des termes quand $n \rightarrow \infty$. Par exemple, considérons les quatre suites suivantes et leurs graphes.

- a) $(1 + 3n)$: Les termes deviennent arbitrairement grands. b) $\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$: Les termes s'approchent de 1.



- c) $((-1)^n)$: Les termes alternent entre 1 et -1. d) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$: Les termes alternent mais s'approchent de 0.



À partir des graphes et des formules explicites de ces suites, on peut faire les observations suivantes :

- Les termes de la suite $(1 + 3n)$ deviennent arbitrairement grands lorsque n devient grand. On dit que la suite $(1 + 3n)$ diverge vers l'infini.
- Les termes de la suite $\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ s'approchent de 1 lorsque n devient grand. On dit que la suite $\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ converge vers 1.
- Les termes de la suite $((-1)^n)$ alternent entre 1 et -1 quand n devient grand. On dit que la suite $((-1)^n)$ diverge.
- Les termes de la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ alternent entre valeurs positives et négatives, mais ils s'approchent de 0 lorsque n devient grand. On dit que la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge vers 0.

Définition 12 (Suites convergentes et divergentes)

Étant donné une suite $\{u_n\}$, si les termes u_n deviennent arbitrairement proches d'un nombre fini ℓ lorsque n devient suffisamment grand, on dit que $\{u_n\}$ est une **suite convergente** et que ℓ est la limite de la suite. Dans ce cas, on écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell.$$

Si une suite $\{u_n\}$ n'est pas convergente, on dit que c'est une **suite divergente**.

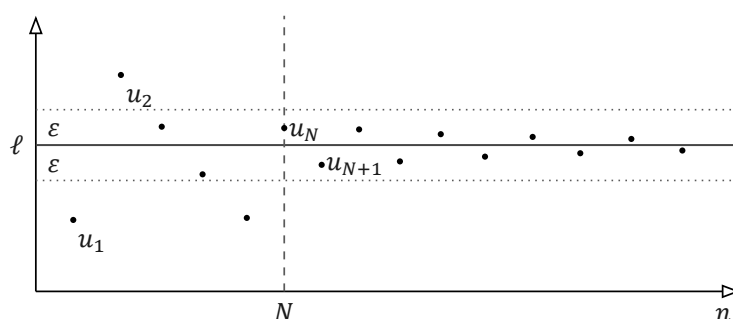
Définition 13 (Convergence)

Une suite $\{u_n\}$ converge vers un nombre réel ℓ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que

$$|u_n - \ell| < \varepsilon \text{ pour tout } n \geq N.$$

Le nombre ℓ est la limite de la suite, et on écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell.$$

**Théorèmes 1**

1. Si une suite admet une limite ℓ , cette limite est unique.
2. Une suite croissante majorée converge.
Une suite décroissante minorée converge.
Une suite monotone et bornée converge.
3. Une suite convergente est bornée.
4. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites qui convergent vers ℓ_u et ℓ_v , respectivement, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :
 - a. La suite $u_n + v_n$ converge vers $\ell_u + \ell_v$.
 - b. La suite λu_n converge vers $\lambda \ell_u$.
 - c. La suite $u_n \cdot v_n$ converge vers $\ell_u \cdot \ell_v$.
 - d. La suite $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers $\frac{\ell_u}{\ell_v}$ si $\ell_v \neq 0$ et $v_n \neq 0, \forall n$.

Sans démonstration.

 **Série 3** · exercices 12 à 13

4 Séries numériques

4.1 Séries finies

La lettre grecque majuscule $\sum$, sigma, sert à écrire des sommes de façon compacte. Par exemple,

$$1 + 2 + 3 + \dots + 19 + 20 = \sum_{i=1}^{20} i.$$

Plus généralement,

$$\sum_{i=1}^n u_i$$

désigne la somme des termes u_i , pour i allant de 1 à n . L'indice i sert seulement à repérer les termes, on l'appelle une variable muette.

Exemple 9 (Utiliser la notation sigma)

a) La somme des termes 3^i pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$ s'écrit

$$\sum_{i=1}^5 3^i = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 = 363.$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$$

s'écrit

$$\sum_{i=1}^5 \frac{1}{i^2}.$$

b) La somme

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$$

s'écrit

$$\sum_{i=1}^5 \frac{1}{i^2}.$$

En pratique 6

Écrire en notation sigma et évaluer la somme des termes 2^i pour $i = 3, 4, 5, 6$.

Théorèmes 2 (Propriétés de la notation sigma)

Soient $u_1, \dots, u_n$ et $v_1, \dots, v_n$ deux suites de termes, et soit c une constante. Alors :

$$\sum_{i=1}^n c = nc \quad (\text{somme d'une constante})$$

$$\sum_{i=1}^n cu_i = c \sum_{i=1}^n u_i \quad (\text{multiplication par une constante})$$

$$\sum_{i=1}^n (u_i + v_i) = \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{i=1}^n v_i \quad (\text{propriété d'une somme})$$

$$\sum_{i=1}^n (u_i - v_i) = \sum_{i=1}^n u_i - \sum_{i=1}^n v_i \quad (\text{propriété d'une différence})$$

$$\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^m u_i + \sum_{i=m+1}^n u_i \quad (\text{séparation d'une somme})$$

Preuve. Pour la multiplication par une constante :

$$\sum_{i=1}^n cu_i = cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = c \sum_{i=1}^n u_i.$$

Pour la propriété de la somme :

$$\sum_{i=1}^n (u_i + v_i) = (u_1 + v_1) + \dots + (u_n + v_n) = (u_1 + \dots + u_n) + (v_1 + \dots + v_n) = \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{i=1}^n v_i.$$

□

Nous avons démontré les formules suivantes au chapitre précédent.

Théorèmes 3 (Sommes et puissances d'entiers)

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{somme des } n \text{ premiers entiers})$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = n(n+1) \frac{2n+1}{6} \quad (\text{somme des } n \text{ premiers carrés})$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = n^2 \frac{(n+1)^2}{4} \quad (\text{somme des } n \text{ premiers cubes})$$

Exemple 10 (Appliquer les formules)

$$\sum_{i=1}^{200} (i-3)^2 = \sum_{i=1}^{200} (i^2 - 6i + 9) = \sum_{i=1}^{200} i^2 - 6 \sum_{i=1}^{200} i + \sum_{i=1}^{200} 9.$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{200} (i-3)^2 = 200(201) \frac{401}{6} - 6 \cdot 200 \frac{201}{2} + 9(200) = 2567900.$$

De même,

$$\sum_{i=1}^6 (i^3 - i^2) = \sum_{i=1}^6 i^3 - \sum_{i=1}^6 i^2 = \frac{1764}{4} - \frac{546}{6} = 350.$$

En pratique 7

Trouver la somme des valeurs de $4 + 3i$ pour $i = 1, 2, \dots, 100$.

Exemple 11 (Somme de valeurs d'une fonction)

Trouver la somme des valeurs de $f(x) = x^3$ sur les entiers $1, 2, 3, \dots, 10$.

$$\sum_{i=1}^{10} i^3 = 10^2 \frac{(10+1)^2}{4} = 100 \cdot \frac{121}{4} = 3025.$$

En pratique 8

Évaluer $\sum_{k=1}^{20} (2k + 1)$.

Nous avons vu qu'une suite est un ensemble ordonné de termes. Si l'on additionne ces termes jusqu'à un certain indice n , on obtient une somme finie. Dans la prochaine section, nous définissons la notion de somme « infinie » et montrons comment ces sommes sont liées aux suites. Nous définissons aussi ce que signifie, pour une telle somme, converger ou diverger.

4.2 Séries infinies**Définition 14 (Notation d'une série infinie)**

Une série infinie est une somme d'une infinité de termes et s'écrit sous la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

Mais qu'est-ce que cela signifie ? On ne peut pas additionner une infinité de termes de la même façon que l'on additionne un nombre fini de termes. À la place, la valeur d'une série infinie est définie au moyen de la limite des sommes partielles.

Définition 15 (Somme partielle)

Pour chaque entier positif k , la somme

$$S_k = \sum_{n=1}^k u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k$$

est appelée la k -ième **somme partielle** de la série infinie.

Pour voir comment utiliser les sommes partielles pour évaluer des séries infinies, considérons l'exemple suivant.

Exemple 12

Supposons que de l'huile se déverse dans un lac de sorte que 1000 litres entrent dans le lac la première semaine. Pendant la deuxième semaine, 500 litres supplémentaires d'huile entrent dans le lac. La troisième semaine, 250 litres de plus entrent dans le lac.

Supposons que ce modèle continue, de sorte que chaque semaine, la quantité d'huile qui entre dans le lac soit égale à la moitié de celle de la semaine précédente. Si cela continue indéfiniment, que peut-on dire de la quantité d'huile dans le lac ? La quantité d'huile continuera-t-elle de devenir arbitrairement grande, ou est-il possible qu'elle approche une quantité finie ?

Pour répondre à cette question, on regarde la quantité d'huile dans le lac après k semaines. En notant S_k la quantité d'huile dans le lac, mesurée en milliers de litres, après k semaines, on voit que

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + 0,5 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_3 = 1 + 0,5 + 0,25 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$S_4 = 1 + 0,5 + 0,25 + 0,125 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$S_5 = 1 + 0,5 + 0,25 + 0,125 + 0,0625 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}.$$

En regardant ce modèle, on voit que la quantité d'huile dans le lac, en milliers de litres, après k semaines est

$$S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Nous nous intéressons à ce qui se passe lorsque $k \rightarrow \infty$ (k tend vers l'infini). Symboliquement, la quantité d'huile dans le lac lorsque $k \rightarrow \infty$ est donnée par la série infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots.$$

En même temps, lorsque $k \rightarrow \infty$, la quantité d'huile dans le lac peut être calculée en évaluant $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$. Par conséquent, le comportement de la série peut être déterminé en regardant le comportement de la suite des sommes partielles (S_k). Si la suite des sommes partielles (S_k) converge, on dit que la série infinie converge, et sa somme est donnée par $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$. Si la suite (S_k) diverge, on dit que la série infinie diverge. Nous allons maintenant déterminer la limite de cette suite (S_k).

D'abord, en simplifiant certaines de ces sommes partielles, on voit que

$$S_1 = 1$$

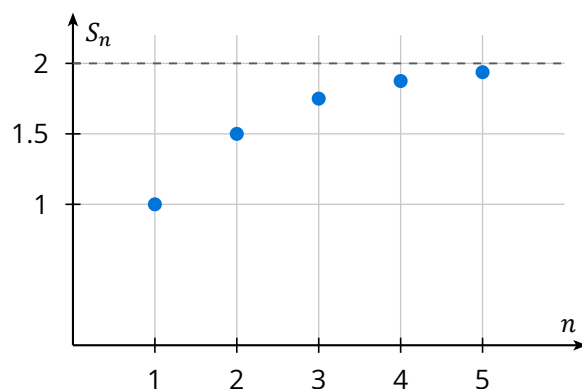
$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

$$S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16}.$$

En représentant quelques-unes de ces valeurs, il semble que la suite (S_k) pourrait s'approcher de 2.



Cherchons des éléments plus convaincants. Dans le tableau suivant, nous listons les valeurs de S_k pour plusieurs valeurs de k .

k	5	10	15	20
S_k	1.9375	1.998	1.999939	1.999998

Ces données suggèrent que la suite (S_k) converge vers 2. La formule de la somme des k premiers termes d'une suite géométrique le confirme :

$$S_k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \rightarrow 2.$$

Comme cette suite de sommes partielles converge vers 2, on dit que la série infinie converge et que sa somme vaut 2. On écrit

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2.$$

Revenons à la question de l'huile dans le lac. Comme cette série infinie converge vers 2, on conclut que la quantité totale d'huile déversée dans le lac tend vers 2000 litres.

Résumons ce que signifie pour une série infinie de converger.

Définition 16 (Convergence d'une série)

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ une série infinie et S_k sa k -ième somme partielle. Les sommes partielles forment une suite (S_k) . Si la suite des sommes partielles converge vers un nombre réel S , la série infinie converge. On appelle alors S la somme de la série, et on écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

Si la suite des sommes partielles diverge, on dit que la série diverge.

Notons que l'indice d'une série ne doit pas forcément commencer à $n = 1$, mais peut commencer à n'importe quelle valeur. Par exemple, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

peut aussi s'écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}.$$

Il est souvent commode que l'indice commence à 1, donc s'il commence pour une raison quelconque à une autre valeur, on peut réindexer en effectuant un changement de variable. Par exemple, considérons la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

En introduisant la variable $m = n - 1$, de sorte que $n = m + 1$, on peut réécrire la série sous la forme

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^2}.$$

Exemple 13 (Évaluer les limites de suites de sommes partielles)

Pour chacune des séries suivantes, utiliser la suite des sommes partielles pour déterminer si la série converge ou diverge.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Solution.

a) La suite des sommes partielles $\{S_k\}$ vérifie

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}.$$

Remarquons que chaque terme ajouté est plus grand que $\frac{1}{2}$. Par conséquent, on voit que

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{1}{2}.$$

D'après ce modèle, on voit que $S_k > k\left(\frac{1}{2}\right)$ pour tout entier k . Donc $\{S_k\}$ n'est pas bornée et, par conséquent, diverge. Ainsi, la série infinie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ diverge.

b) La suite des sommes partielles $\{S_k\}$ vérifie

$$S_1 = -1$$

$$S_2 = -1 + 1 = 0$$

$$S_3 = -1 + 1 - 1 = -1$$

$$S_4 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0.$$

D'après ce modèle, on voit que la suite des sommes partielles est

$$\{S_k\} = \{-1, 0, -1, 0, \dots\}.$$

Comme cette suite diverge, la série infinie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ diverge.

c) La suite des sommes partielles $\{S_k\}$ vérifie

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

$$S_5 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{5}{6}.$$

D'après ce modèle, on voit que la k -ième somme partielle est donnée par la formule explicite

$$S_k = \frac{k}{k+1}.$$

Comme $\frac{k}{k+1} \rightarrow 1$, on conclut que la suite des sommes partielles converge, et donc que la série infinie converge vers 1. On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

En pratique 9

Déterminer si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ converge ou diverge.

 **Série 4** · exercices 8 à 11

4.3 Somme d'une série géométrique

Soit la série géométrique

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots,$$

où $a \neq 0$ est le terme initial et r la raison. Sa k -ième somme partielle vaut

$$S_k = \begin{cases} \frac{a(1-r^k)}{1-r} & \text{si } r \neq 1. \\ k \cdot a & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

Si $|r| < 1$, alors $r^k \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Par conséquent,

$$S_k \rightarrow \frac{a}{1-r}.$$

Si $r = 1$, alors $S_k = k \cdot a$ diverge. Si $r = -1$, la suite (S_k) alterne entre a et 0 et diverge. Enfin, si $|r| > 1$, le terme r^k ne possède pas de limite finie ; la suite (S_k) diverge donc également.

Formule (Série géométrique)

Soit une série géométrique de terme initial $a \neq 0$ et de raison r :

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

Si $|r| < 1$, la série **converge** et sa somme vaut

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \text{ pour } |r| < 1.$$

Si $|r| \geq 1$, la série **diverge**.

Lorsque $a = 0$, la série converge vers 0, quelle que soit la valeur de r .

Exemple 14 (Retour sur l'exemple de départ)

Si l'on reprend la série géométrique formée par la suite $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ qui modélisait l'écoulement de l'huile dans le lac, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Cette série est géométrique, de terme initial $a = 1$ et de raison $r = \frac{1}{2}$. Sa somme vaut $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$, la valeur que nous avons trouvée intuitivement précédemment.

Les séries géométriques apparaissent parfois sous des formes légèrement différentes. Par exemple, l'indice commence parfois à une valeur autre que $n = 1$, ou l'exposant contient une expression linéaire en n autre que $n - 1$. Tant que l'on peut réécrire la série sous la forme précédente, c'est une série géométrique.

Par exemple, considérons la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}.$$

Pour voir que c'est une série géométrique, écrivons les premiers termes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \dots = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots$$

On voit que le terme initial est $a = \frac{4}{9}$ et que la raison est $r = \frac{2}{3}$. Donc la série peut s'écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Comme $r = \frac{2}{3} < 1$, cette série converge, et sa somme est donnée par

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{4}{3}.$$

Exemple 15 (Déterminer la convergence ou la divergence d'une série géométrique)

Déterminer si chacune des séries géométriques suivantes converge ou diverge, et si elle converge, trouver sa somme.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{4^{n-1}}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n}$$

Solution.

a) En écrivant les premiers termes de la série, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{4^{n-1}} &= \frac{(-3)^2}{4^0} + \frac{(-3)^3}{4} + \frac{(-3)^4}{4^2} + \dots \\ &= (-3)^2 + (-3)^2 \cdot \left(\frac{-3}{4}\right) + (-3)^2 \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^2 + \dots \\ &= 9 + 9 \cdot \left(\frac{-3}{4}\right) + 9 \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^2 + \dots \end{aligned}$$

Le terme initial est $a = 9$ et la raison est $r = -\frac{3}{4}$. Comme $|r| = \frac{3}{4} < 1$, la série converge vers

$$\frac{9}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{9}{\frac{7}{4}} = \frac{36}{7}.$$

b) En écrivant cette série sous la forme

$$e^2 \sum_{n=1}^{\infty} (e^2)^{n-1},$$

on voit que c'est une série géométrique où $r = e^2 > 1$. Donc la série diverge.

En pratique 10

Déterminer si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{5}\right)^{n-1}$ converge ou diverge. Si elle converge, trouver sa somme.

 Série 4 · exercices 3 à 7

Nous nous tournons maintenant vers une jolie application des séries géométriques. Nous montrons comment les utiliser pour écrire des décimaux périodiques comme des fractions d'entiers.

Exemple 16 (Écrire des décimaux périodiques comme fractions d'entiers)

Utiliser une série géométrique pour écrire $3.\overline{26}$ comme une fraction d'entiers.

Solution. Comme $3.[26] = 3,262626\dots$, on écrit d'abord

$$3.\overline{26} = 3 + \frac{26}{100} + \frac{26}{10000} + \frac{26}{1000000} + \dots = 3 + \frac{26}{10^2} + \frac{26}{10^4} + \frac{26}{10^6} + \dots$$

En ignorant le terme 3, le reste de cette expression est une série géométrique de terme initial $a = \frac{26}{10^2}$ et de raison $r = \frac{1}{10^2}$. Donc la somme de cette série est

$$\frac{\frac{26}{10^2}}{1 - \left(\frac{1}{10^2}\right)} = \frac{\frac{26}{10^2}}{\frac{99}{10^2}} = \frac{26}{99}.$$

Ainsi,

$$3.\overline{26} = 3 + \frac{26}{99} = \frac{323}{99}.$$

 Série 4 · exercices 12 à 14