

Découvrir et calculer les coefficients binomiaux

Exercice 1 Découvrir les coefficients binomiaux et le triangle de Pascal.

Lorsque $0 \leq k \leq n$, on note C_k^n le nombre de façons de choisir k objets parmi n objets ou dit autrement, le nombre de possibilités de former des groupes de k objets à partir de n objets.

Le triangle de Pascal est le tableau dont la ligne n contient, dans l'ordre, les nombres $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$.

- On a quatre élèves A, B, C et D , lister les choix possibles de former des groupes de 0, 1, 2, 3 et 4 élèves. En déduire les valeurs de $C_0^4, C_1^4, C_2^4, C_3^4$ et C_4^4 , puis écrire la ligne $n = 4$ du triangle de Pascal.
- Expliquer pourquoi $C_0^n = C_n^n = 1$.
- Pour $1 \leq k \leq n$, justifier la relation $C_k^{n+1} = C_{k-1}^n + C_k^n$ en distinguant les choix qui contiennent un élève fixé et ceux qui ne le contiennent pas.
- Construire, avec cette relation, les lignes $n = 0$ à $n = 6$ du triangle de Pascal.
- Lire dans le triangle les valeurs de C_2^5, C_3^6, C_4^6 .
- Vérifier numériquement que $C_2^5 + C_3^5 = C_3^6$ et que $C_3^5 + C_4^5 = C_4^6$.
- Réécrire la relation de Pascal sous la forme générale suggérée par ces deux égalités.

Exercice 2 Calculer sans calculatrice.

- | | | | |
|------------|------------|------------|------------|
| a) C_0^8 | b) C_1^8 | c) C_2^8 | d) C_3^8 |
| e) C_4^8 | f) C_5^8 | g) C_6^8 | h) C_8^8 |

Exercice 3 Simplifiez les expressions suivantes :

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|----------------------------|
| a) $\frac{n!}{(n-1)!}$ | b) $\frac{(n+2)!}{n!}$ | c) $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$ |
| d) $\frac{(n-k+1)!}{(n-k-1)!}$ | e) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$ | |

Exercice 4 Simplifier puis calculer.

- | | | | |
|------------|------------|----------------|----------------|
| a) C_2^n | b) C_3^n | c) C_{n-1}^n | d) C_{n-2}^n |
|------------|------------|----------------|----------------|

Relations dans le triangle de Pascal

Exercice 5 On considère la propriété suivante des coefficients binomiaux :

$$C_k^n = C_{n-k}^n$$

- Démontrer cette propriété en utilisant la définition des coefficients binomiaux ;
 - Expliquer cette propriété en utilisant un argument de combinatoire (avec les possibilités de choix de groupements);
 - Illustrer cette propriété sur le triangle de Pascal.
- Même questions pour la propriété :

$$C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$$

Exercice 6 Démontrez les identités suivantes :

- | | |
|--|--|
| a) $C_{k+2}^{n+1} + C_{k+1}^n + C_k^n = C_{k+2}^{n+2}$ | b) $C_k^n = \frac{n-k+1}{k} \cdot C_{k-1}^n$ |
|--|--|

À l'aide de la deuxième identité, calculez les six premiers nombres de la ligne du triangle de Pascal qui commence par 1 et 70.

Binôme de Newton

Exercice 7 Développez les binômes suivants à l'aide de la formule du binôme de Newton :

- | | |
|-----------------|-----------------|
| a) $(x + 2y)^6$ | b) $(3a - b)^4$ |
|-----------------|-----------------|

Exercice 8 Trouvez le terme de degré 6 en y dans le développement de $(x - 2y^2)^{15}$.

★ **Exercice 9** Écrivez les quatre premiers termes du développement de $(a + b)^{100}$. (On suppose ce développement classé selon les puissances décroissantes de la variable a)

Premières preuves par récurrence

Exercice 10 Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Exercice 11 Démontrer par récurrence que :

a) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$

b) $2 + 6 + 18 + \dots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$

Exercice 12 Démontrer par récurrence que $4^n + 2$ est un multiple de 3, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

★ **Exercice 13** Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Découvrir et calculer les coefficients binomiaux

Solution 3

- a) n
- b) $n^2 + 3n + 2$
- c) $\frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$
- d) $n^2 + n - 2kn - k + k^2$
- e) $\frac{1}{(n+1)(n-1)!}$

Relations dans le triangle de Pascal

Solution 6

1 ; 70 ; 2'415 ; 54'740 ; 916'895 ; 12'103'014

Binôme de Newton

Solution 7

- a) $x^6 + 12x^5y + 60x^4y^2 + 160x^3y^3 + 240x^2y^4 + 192x^1y^5 + 64x^0y^6$
- b) $81a^4 - 108a^3b + 54a^2b^2 - 12a^1b^3 + b^4$

Solution 8

$-3640x^{12}y^6$

Solution 9

1 ; 100 ; 4'950 ; 161'700

Premières preuves par récurrence
