

Pascal et récurrence

- Exercice 1** On pose $C_0^n = C_n^n = 1$ et, pour les nombres intérieurs du triangle, $C_k^{n+1} = C_{k-1}^n + C_k^n$.
- Construire les lignes $n = 0$ à $n = 7$.
 - Montrer par récurrence sur n que la somme des nombres de la ligne n vaut 2^n .

- Exercice 2** Démontrer par récurrence sur $n \geq r$ l'identité suivante :

$$\sum_{k=r}^n C_r^k = C_{r+1}^{n+1}.$$

Illustrer le résultat dans le triangle de Pascal pour $r = 2$.

Sommes binomiales

- Exercice 3** Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_{2k+1}^n = 2^{n-1}.$$

Indication : appliquer la formule du binôme de Newton à $(1 - 1)^n$.

- Exercice 4** (Entraînement individuel) Calculer en utilisant le binôme de Newton.

- $\sum_{k=0}^{11} C_k^{11}$
- $C_1^9 + C_3^9 + C_5^9 + \dots$
- $\sum_{k=0}^{11} (-1)^k C_k^{11}$
- Dans le développement de $(1 + x)^{10}$, quel est le coefficient de x^3 ?
- Dans le développement de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$, donner le coefficient du terme en x^4 .
- Dans le développement de $(3 - 3x)^4$, quel est le coefficient de x^2 ?

- ★ **Exercice 5** Pour $n \geq 0$, on définit

$$D_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_k^{n-k}.$$

- Calculer D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 et D_5 .
- En observant ces valeurs, conjecturer un lien avec la suite de Fibonacci $F_1 = F_2 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
- Démontrer que $D_{n+2} = D_{n+1} + D_n$ pour tout $n \geq 0$.
- Conclure.

Autres récurrences

- Exercice 6** On considère la formule suivante :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- Démontrer par récurrence que cette formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- Déduire de cette formule la valeur de $50^2 + 51^2 + 52^2 + \dots + 98^2 + 99^2$.

- Exercice 7** Calculer, formuler une conjecture et la démontrer.

- $\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \dots$; $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \dots$; $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \dots$; ...

b) Pour quels entiers n les nombres $2^n - 1$ sont-ils multiples de 3 ?

Exercice 8

Montrer par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le reste de la division entière de 10^n par 3 est 1. En déduire le critère de divisibilité par 3.

★ Exercice 9

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donnée de manière récurrente par :

$$a_0 = 2; \quad a_1 = 3 \text{ et } a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$$

Montrer que $a_n = 2^n + 1$

Premières suites : de la formule à la récurrence

Exercice 10

Déterminer le terme suivant. Pour chaque suite, proposer le terme suivant et une règle (formule ou définition) qui l'engendre.

a) 1; 4; 9; 16; 25; ...

b) 2; 3; 5; 7; 11; 13; ...

c) 1; 1; 2; 3; 5; 8; ...

d) 1; 3; 6; 10; 15; ...

e) 1; 2; 4; 8; 16; ...

Exercice 11

Déterminer le terme général des suites (u_n) initiées par :

a) 4; 7; 10; 13; 16; ...

b) 2; 8; 18; 32; 50; ...

c) $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$

d) $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{4}; \frac{2}{5}; \frac{3}{6}; \frac{4}{7}; \dots$

Exercice 12

Ecrire les six premiers termes des suites (u_n) données de manière récurrente par :

a) $u_1 = 2; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$

b) $u_1 = 1; \quad u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + 1$

c) $u_1 = 1; \quad u_2 = 2; \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$

d) $u_1 = 1; \quad u_2 = -2; \quad u_{n+1} = u_n \cdot u_{n-1}$

Exercice 13

Définir par récurrence la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par son terme général :

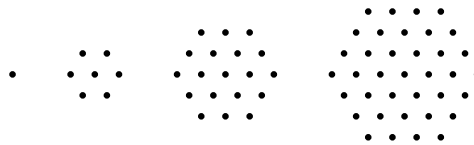
a) $u_n = 2n + 1$

b) $u_n = 3 \cdot 2^n - 1$

c) $u_n = n^2$

Exercice 14

On considère une suite de figures formées de points :



a) Quel est le nombre de points dans la cinquième figure ?

b) Donner de manière récurrente la suite de nombres suggérée par ces figures.

c) Déterminer une formule donnant le nombre de points de la $n^{\text{ième}}$ figure. Démontrer.

Pascal et récurrence

Sommes binomiales

Solution 3

Avec le binôme de Newton, $\sum_{j=0}^n C_j^n = 2^n$ et $\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^j C_j^n = 0$. En soustrayant, les termes pairs disparaissent et les termes impairs sont doublés, donc $2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_{2k+1}^n = 2^n$.

Autres récurrences

Premières suites : de la formule à la récurrence
