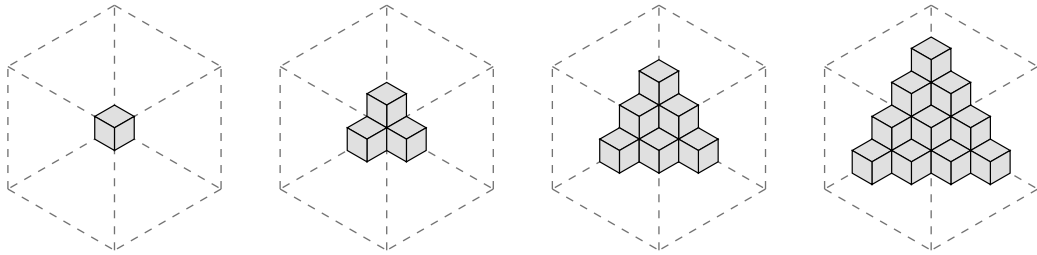


Suites remarquables et démonstrations par récurrence

Exercice 1 Dans un coin d'une salle, on empile régulièrement des cubes, sans laisser aucun vide :



- a) Exprimer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui compte le nombre de cubes utilisés dans le $n^{\text{ième}}$ empilement, de manière récurrente ;
- b) Démontrer que son terme général est :

$$u_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Exercice 2 **La tour de Hanoï.** On dispose de trois piquets et de n disques de diamètres tous différents, empilés du plus grand (en bas) au plus petit (en haut) sur le premier piquet. On veut déplacer toute la tour sur un autre piquet, en déplaçant un seul disque à la fois et sans jamais poser un disque sur un disque plus petit. On note h_n le nombre minimal de déplacements.

- a) Vérifier que $h_1 = 1$, $h_2 = 3$ et $h_3 = 7$.
- b) Justifier la relation de récurrence $h_n = 2h_{n-1} + 1$.
- c) Démontrer par récurrence que $h_n = 2^n - 1$.
- d) La légende parle d'une tour de 64 disques. À raison d'un déplacement par seconde, combien de temps faudrait-il pour la déplacer ? Comparer à l'âge de l'Univers ($\approx 13,8$ milliards d'années).

★ **Exercice 3** On considère (f_n) , la suite de Fibonacci définie par :

$$f_1 = f_2 = 1; \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

- a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

- b) Calculer l'expression $f_n^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1}$ pour quelques valeurs de n . Quelles conjectures peut-on faire à parti de ces résultats ?
- c) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

★ **Exercice 4** **La suite de Syracuse (conjecture de Collatz).** On définit une suite par un premier terme $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et la règle

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

- a) Écrire les termes de la suite jusqu'à atteindre 1, en partant de $u_0 = 6$, puis de $u_0 = 7$.
- b) Que se passe-t-il si l'on continue après avoir atteint 1 ?
- c) La **conjecture de Collatz** affirme que, quel que soit le premier terme, la suite finit toujours par atteindre 1. Que sait-on de cette conjecture ?

Progressions arithmétiques et géométriques

Exercice 5 Calculer le 30-ième terme des progressions suivantes, ainsi que la somme des 30 premiers termes :

a) 1; 1,25; 1,5; 1,75; 2; ...

b) 2; 2,2; 2,42; 2,662; 2,9282; ...

c) 3; 2; $\frac{4}{3}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{16}{27}$; ...

d) 100; 97,5; 95; 92,5; 90; ...

Exercice 6

Déterminer une suite arithmétique comportant cinq termes dont la somme est égale à 25 et la somme des carrés est égale à 165.

Exercice 7

On organise un concours pour lequel on dispose de 1'000'000. - à distribuer en prix. Les organisateurs décident d'attribuer le cinquième de cette somme au vainqueur, le cinquième du reste au deuxième, etc...

a) Quelle somme recevra le participant classé 40^{ème} de ce concours ?

b) Quel nombre maximal de prix les organisateurs peuvent-ils attribuer s'ils veulent conserver 1' 000. - pour des frais divers ?

Suites arithmético-géométriques**Exercice 8**

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie de manière récursive par

$$u_1 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4, n \geq 1$$

Une seconde suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donnée par : $t_n = u_n - 6$.

a) Démontrer que (t_n) est une suite géométrique ;b) Donner le terme général t_n en fonction de n ; en déduire le terme général de la suite (u_n) ;c) Déterminer un entier naturel N tel que : $\forall n > N \Rightarrow 6 - u_n < 10^{-10}$.**Exercice 9**

Remboursement d'un prêt. On emprunte 10000 CHF. Chaque année, la dette augmente de 5% d'intérêts, puis on rembourse 2000 CHF. On note D_n la dette après n années ($D_0 = 10000$).

a) Exprimer D_{n+1} en fonction de D_n , puis calculer D_1 et D_2 .b) On pose $v_n = D_n - 40000$. Montrer que (v_n) est géométrique, puis donner D_n en fonction de n .

c) Au bout de combien d'années la dette est-elle remboursée ?

Limites, convergence et applications**Exercice 10**

Un radical sans fin. On considère la suite définie par $u_1 = 1$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

a) Calculer des valeurs approchées de u_2, u_3, u_4, u_5 .b) La suite semble croissante et majorée par 2 : elle converge donc vers une limite ℓ . En passant à la limite dans la relation de récurrence, montrer que $\ell^2 = \ell + 1$.c) En déduire la valeur exacte de ℓ . Reconnaitre-vous ce nombre ?**★ Exercice 11**

Achille et la tortue (paradoxe de Zénon). Achille court à 10 m/s, la tortue à 1 m/s ; la tortue part avec 100 m d'avance. Zénon raisonne ainsi : quand Achille atteint le point de départ de la tortue (100 m), celle-ci a avancé de 10 m ; quand il parcourt ces 10 m, elle a avancé de 1 m ; etc. « Achille ne rattrapera donc jamais la tortue. »

a) Écrire la suite des distances 100, 10, 1, ... qu'Achille parcourt à chaque étape. Quelle est sa nature ?

b) Calculer la distance totale parcourue par Achille comme somme d'une série géométrique. En déduire le temps mis pour rejoindre la tortue.

c) Retrouver ce temps directement et résoudre le « paradoxe ».

Séries arithmétiques**Exercice 12**

On considère la suite arithmétique de premier terme $a_1 = 3$ et de raison $r = 4$, donc $a_n = 4n - 1$.

a) Calculer la somme partielle $S_{50} = a_1 + a_2 + \dots + a_{50}$.b) Quel est le plus petit entier k tel que $S_k > 10'000$?**Exercice 13**

Les gradins d'un théâtre antique comptent 15 places sur la première rangée, et chaque rangée suivante contient 2 places de plus que la précédente.

a) Combien de places contient la 20-ième rangée ?

- b) Combien de places le théâtre compte-t-il au total si l'on aménage 20 rangées ?
c) Mêmes questions avec 1000 rangées.

Séries géométriques finies

Exercice 14

Calculer les sommes partielles suivantes.

a) $\sum_{n=1}^{10} 3 \cdot 2^{n-1}$

b) $\sum_{n=0}^6 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Exercice 15

La légende de l'échiquier. Selon la légende, l'inventeur du jeu d'échecs demanda comme récompense 1 grain de blé sur la première case de l'échiquier, 2 grains sur la deuxième, 4 sur la troisième, et ainsi de suite en doublant à chaque case.

- a) Écrire à l'aide de la notation sigma le nombre total de grains réclamés pour les 64 cases.
b) Donner ce total sous forme d'une puissance de 2 (moins 1).