

Séries géométriques infinies : convergence et somme

Exercice 1 Pour chacune des deux suites (t_n) , calculer

$$t_{10}; \quad s_{10} = \sum_{i=1}^{10} t_i; \quad S = \sum_{i=1}^{\infty} t_i$$

a) $100; 10; 1; \frac{1}{10}; \dots$

b) $\sqrt{5}; \frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{4}; \dots$

Exercice 2 Pour chacune des séries géométriques suivantes, déterminer si elle converge ou diverge ; si elle converge, donner sa somme.

a) $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{4^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\pi}{3}\right)^{n-1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

Exercice 3 Réécrire chaque série sous la forme $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, puis déterminer sa somme.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{4^{n-1}}$

Exercice 4 Une série géométrique $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ est entièrement déterminée par son premier terme a_1 et le rapport constant $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$. Dans chaque cas, écrire la série sous la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$, déterminer si elle converge et, le cas échéant, calculer sa somme.

a) $a_1 = -1$ et $\frac{a_n}{a_{n+1}} = -5$;

b) $a_1 = \frac{1}{10}$ et $\frac{a_n}{a_{n+1}} = -10$.

Exercice 5 On considère la série géométrique de paramètre x :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 + \dots$$

a) Pour quelles valeurs de x cette série converge-t-elle ?b) Pour ces valeurs, exprimer la somme en fonction de x .c) En déduire la valeur de la somme lorsque $x = \frac{3}{2}$.

Sommes partielles et convergence

Exercice 6 Pour la série $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$:a) Calculer les sommes partielles S_1, S_2, S_3, S_4 et les simplifier à l'aide des propriétés du logarithme.b) Conjecturer une formule explicite pour S_k .

c) La série converge-t-elle ou diverge-t-elle ?

Exercice 7 Pour chaque série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, on donne l'expression de sa k -ième somme partielle S_k . Retrouver le terme général a_n (pour $n \geq 2$), puis déterminer si la série converge et, le cas échéant, donner sa somme.

a) $S_k = 1 - \frac{1}{k}$;

b) $S_k = \sqrt{k}$;

c) $S_k = \frac{k}{k+1}$.

Exercice 8 On étudie la série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$.

a) Vérifier que $\frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1} \right)$.

b) En déduire une expression simple de la somme partielle S_k (les termes se télescopent).

c) La série converge-t-elle ? Si oui, vers quelle valeur ?

★ **Exercice 9** Déterminer si chaque série télescopique converge ; si oui, donner sa somme.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n+1}} \right)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$

Décimaux périodiques

Exercice 10 À l'aide d'une série géométrique, écrire chaque nombre comme une fraction irréductible.

a) $0.\overline{3}$

b) $3.\overline{26}$

c) $0,4\overline{27}$

d) $0.\overline{9}$

Applications

★ **Exercice 11** On lâche une balle d'une hauteur de 10 m. À chaque rebond, elle remonte aux $\frac{3}{4}$ de la hauteur atteinte au rebond précédent.

a) Quelle hauteur la balle atteint-elle après le 3-ième rebond ?

b) Quelle est la distance verticale totale parcourue par la balle jusqu'à l'arrêt (en supposant une infinité de rebonds) ?

★ **Exercice 12** Calculer la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}.$$

Indication : séparer la fraction en deux séries géométriques.

★ **Exercice 13** Un patient prend 100 mg d'un médicament chaque matin. Au bout de 24 heures, il ne reste dans l'organisme que 30% de la quantité présente la veille.

a) Quelle quantité de médicament reste-t-il dans l'organisme juste avant la 4-ième prise ?

b) Vers quelle quantité (juste après la prise) la concentration se stabilise-t-elle à long terme ?

★ **Exercice 14** On souhaite calculer

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots$$

a) Écrire $\frac{1}{2}S$ et l'aligner avec S « décalé d'un cran ».

b) En calculant $S - \frac{1}{2}S$, montrer que l'on obtient une série géométrique, puis en déduire la valeur de S .