

Calcul intégral

Table des matières

Chapitre 1 : Calcul intégral	1
1.1 Rappels sur les dérivées	2
1.2 Notation Σ (sigma)	4
1.3 Aire sous une courbe	5
3.1 Sommes supérieures et inférieures	7
3.2 Méthode de Darboux	10
1.4 L'intégrale définie	11
4.1 Définition	11
4.2 Propriétés	11
1.5 Théorème fondamental du calcul intégral et applications	12
5.1 Primitive	12
5.2 Théorème fondamental du calcul intégral	14
5.3 Valeur moyenne d'une fonction	16
5.4 Applications et calculs	17
1.6 Aire entre deux courbes	18
1.7 Volumes de révolution	21

Remarque (*Sources et inspirations*)

Ce cours est une synthèse adaptée au programme dont la progression, les exemples et les exercices (des séries) s'inspirent notamment des ressources suivantes :

- Cours de J.-F. Musy, enseignant (à présent à la retraite) au CEC Émilie-Gourd ;
- Louis Leithold, *The Calculus Book* (1971) ;
- EPFL, *Botafogo, Analyse B (MAN)* : l'ensemble des chapitres de la rubrique « Matière » consacrés à l'analyse ;
- Grant Sanderson, 3Blue1Brown, *The Essence of Calculus*, pour l'approche visuelle et intuitive du calcul différentiel et intégral.

1.1 Rappels sur les dérivées

Une compétence indispensable pour ce chapitre sera de savoir dériver (au niveau de l'année dernière, mais il ne faut pas que cela vous pose problème). Commençons par un rappel :

En pratique 1

a) $(5x^4 + 3x + 1)' =$

b) $(\sqrt{x})' =$

c) $(\sqrt{x^3})' =$

d) $(\sin(x^2 + 1))' =$

e) $\left(\frac{\sin(x)}{x^2 + 1}\right)' =$

f) $\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' =$

Dérivées des fonctions usuelles.

Type	Fonction	Dérivée
Constante	c	0
Puissance rationnelle	$x^r, r \in \mathbb{Q}$	rx^{r-1}
Sinus	$\sin(x)$	$\cos(x)$
Cosinus	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
Tangente	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

Règles de dérivation.

Règle	Fonction	Dérivée
Somme	$f + g$	$f' + g'$
Produit	$f \cdot g$	$f'g + fg'$
Inverse	$\frac{1}{g}$	$-\frac{g'}{g^2}, \text{ si } g \neq 0$
Quotient	$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}, \text{ si } g \neq 0$
Composée	$f \circ g$	$(f' \circ g) \cdot g'$

On rappelle la définition de la dérivée en un point.

Définition 1

Une fonction f définie sur un intervalle I ouvert est dérivable en $x_0 \in I$ ssi

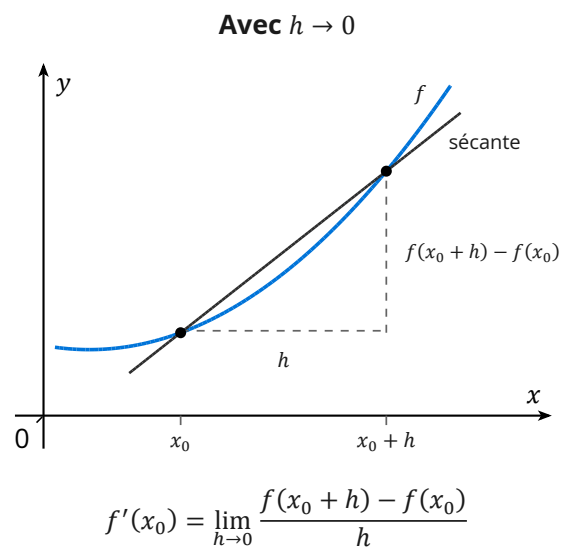
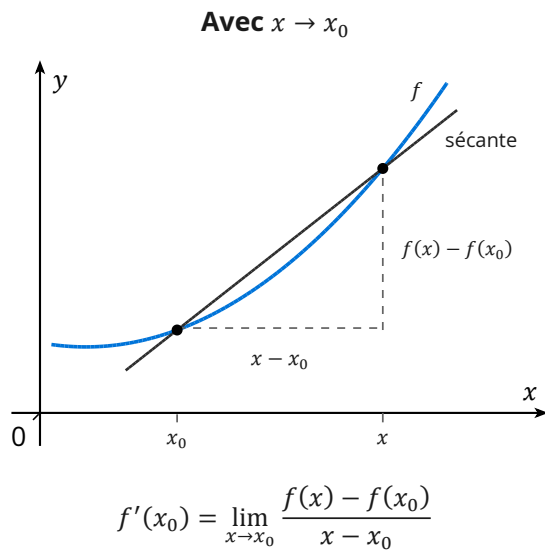
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est fini et existe. En particulier, il faut que la limite à droite et la limite à gauche coïncident, d'où la nécessité de travailler sur un ensemble I ouvert.

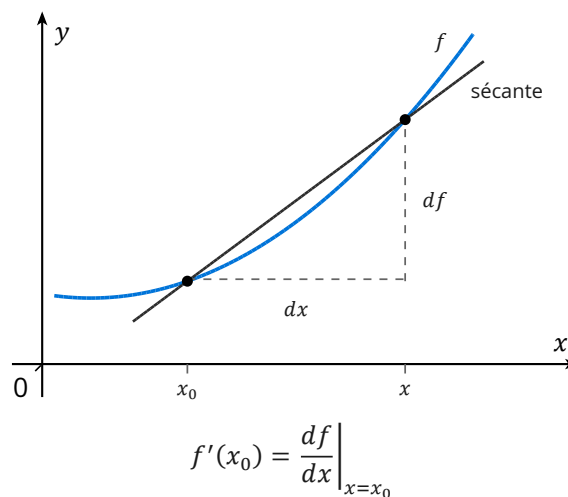
On a la définition équivalente avec la limite suivante :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Graphiquement, le quotient sans la limite correspond à la pente d'une sécante de f autour du point $(x_0; f(x_0))$. La limite correspond à la pente de la tangente au graphe de f au point $(x_0; f(x_0))$.



Notation différentielle



L'interprétation la plus courante est celle de la vitesse moyenne. Si la fonction f correspond à la distance à un point donné en fonction du temps, alors la pente d'une sécante correspond à la vitesse moyenne entre les deux points sécants. La pente de la tangente correspond dans ce cas à la meilleure approximation de la vitesse en ce point (en effet, une vitesse en un point n'est pas un concept qui a un sens physique).

Formule 1 (Équation de la tangente en un point)

Si f est dérivable en x_0 , la tangente au graphe de f au point $(x_0; f(x_0))$ a pour équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

On remarque que cette droite passe par $(x_0; f(x_0))$ et sa pente vaut $f'(x_0)$.

👉 **Série 0** · exercices 1 à 7

1.2 Notation Σ (sigma)

On a déjà vu brièvement cette notation l'année dernière.

On note la somme

$$1 + 2 + \dots + 100 = \sum_{i=1}^{100} i$$

On pourrait aussi l'écrire

$$1 + 2 + \dots + 100 = \sum_{k=1}^{100} k$$

L'indice de sommation est une variable muette, la somme ne dépend pas d'elle.

On écrit

$$1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \sum_{i=1}^n i$$

En pratique 2

Calculer les sommes suivantes

a) $\sum_{i=0}^5 1$

b) $\sum_{i=0}^n 1$

c) $\sum_{i=0}^{10} i$

En pratique 3

Si $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ déterminer la valeur de $\sum_{i=1}^n (i+1)$.

On ne va pas étudier la convergence de ces séries, mais. on peut également écrire

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \text{expression}$$

Formule 2 (Deux sommes à connaître)

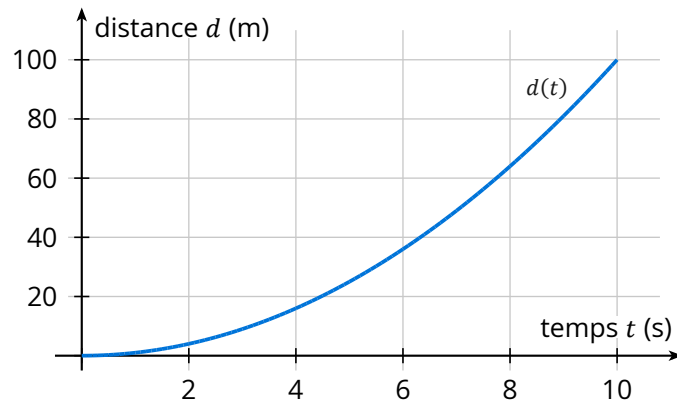
Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

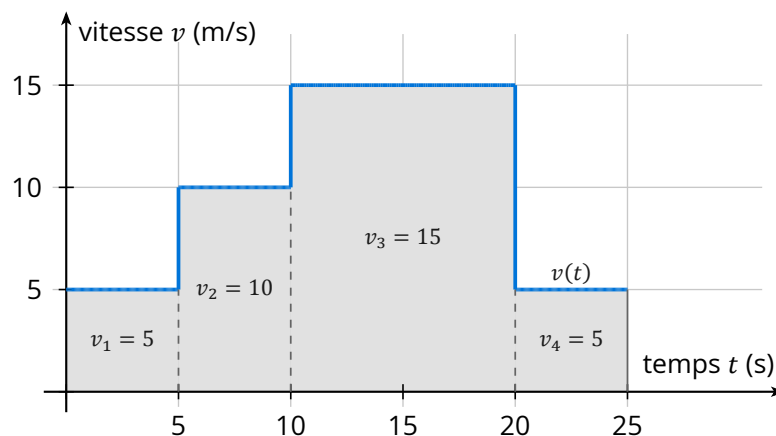
 **Série 1** · exercices 1 à 2

1.3 Aire sous une courbe

Pour la dérivée, nous avons déjà considéré la situation d'une courbe qui représentait la distance parcourue en fonction du temps. La pente de la sécante entre deux points de la courbe fournissait la vitesse moyenne entre ces deux points et la dérivée était la meilleure approximation de la vitesse autour de ce point (la vitesse en un point ne faisant pas vraiment de sens d'un point de vue physique).



On se place à présent dans un autre point de vue. On est dans une voiture et on souhaite connaître la distance parcourue alors que l'on voit seulement le compteur de vitesse. Comment procéder ?



Que veut dire cette représentation graphique ? L'interpréter.

La vitesse est successivement constante : $v_1 = 5$ m/s sur $[0; 5]$, $v_2 = 10$ m/s sur $[5; 10]$, $v_3 = 15$ m/s sur $[10; 20]$ et $v_4 = 5$ m/s sur $[20; 25]$. Les durées correspondantes sont donc $\Delta t_1 = 5$ s, $\Delta t_2 = 5$ s, $\Delta t_3 = 10$ s et $\Delta t_4 = 5$ s.

Sur chaque intervalle où la vitesse est constante, la relation $v_i = \frac{d_i}{\Delta t_i}$ donne $d_i = v_i \Delta t_i$.

Dans ce cas (non valide physiquement, pourquoi?) la distance parcourue après 25 s est :

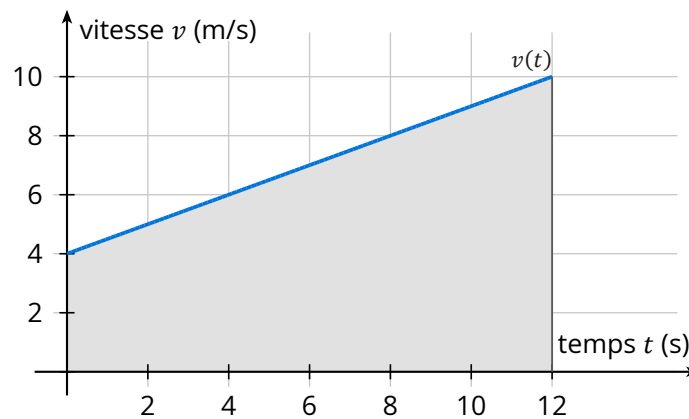
$$\begin{aligned} d &= \sum_{i=1}^4 v_i \Delta t_i \\ &= 5 \cdot 5 + 10 \cdot 5 + 15 \cdot 10 + 5 \cdot 5 \\ &= 25 + 50 + 150 + 25 \\ &= 250 \text{ m.} \end{aligned}$$

Chaque produit correspond à l'aire d'un rectangle. La distance totale parcourue est donc l'aire sous le graphique de la vitesse.

Et si la vitesse n'est plus constante, mais varie de manière régulière ?

Exemple 1 (On calcule l'aire)

La vitesse d'un cycliste augmente régulièrement de 4 m/s à 10 m/s pendant 12 secondes. Quelle distance parcourt-il durant cet intervalle de temps ?



L'aire sous la courbe a une figure de trapèze :

$$d = \frac{(4 + 10) \cdot 12}{2} = 84 \text{ m.}$$

Remarque (Pourquoi s'intéresser à l'aire ?)

Dans les exemples que nous avons étudiés, la vitesse représente le **taux de variation de la distance** par rapport au temps ($v = \frac{d}{t}$). L'aire sous la courbe de la vitesse donne alors la distance totale parcourue.

Cette interprétation se retrouve dans de nombreuses situations :

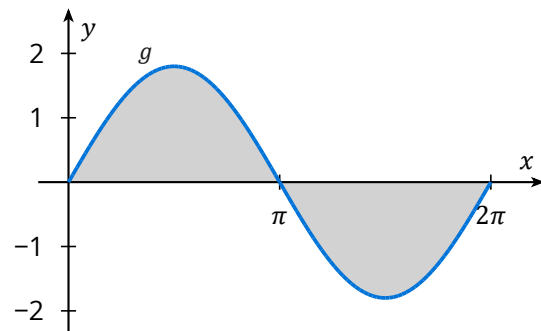
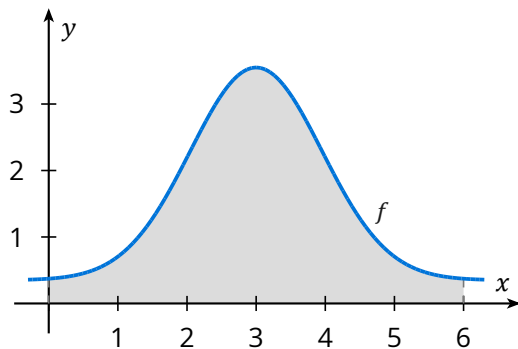
- **Économie** : le coût marginal correspond au taux de variation du coût total par rapport à la quantité produite. Il s'exprime, par exemple, en francs par objet. L'aire sous sa courbe entre deux niveaux de production donne l'augmentation du coût total.
- **Production** : le rythme de production correspond au taux de variation du nombre d'objets produits. Il s'exprime en objets par heure. L'aire sous sa courbe donne le nombre total d'objets produits.
- **Environnement** : le débit de pollution correspond au taux de variation de la masse de polluants rejetés. Il s'exprime en kilogrammes par jour. L'aire sous sa courbe donne la masse totale de polluants rejetés.
- **Météorologie** : l'intensité des précipitations correspond au taux de variation de la quantité de pluie tombée. Elle s'exprime en millimètres par heure. L'aire sous sa courbe donne la quantité totale de pluie tombée.

Ainsi, l'aire sous la courbe d'un taux de variation représente la quantité accumulée sur l'intervalle considéré. Si le taux peut prendre des valeurs négatives, l'aire calculée ainsi devient alors une quantité signée et représente dans ce cas la variation nette de cette quantité (nous verrons cela plus en détail dans la suite de ce chapitre).

1.3.1 Sommes supérieures et inférieures

Exemple 2 (Et pour une aire plus avancée)

Comment procéder pour déterminer les aires représentées ci-dessous ?



On utilise une méthode d'approximation avec des sommes inférieures et des sommes supérieures sur un intervalle donné. On introduit le concept de subdivision régulière.

Définition 2 (Subdivision régulière)

Une subdivision régulière de l'intervalle $[a; b]$ en n sous-intervalles est une suite de points

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

telle que

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$$

pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

La longueur commune $h = \frac{b-a}{n}$ des sous-intervalles est appelée le *pas* de la subdivision.

Exemple 3

Pour subdiviser régulièrement l'intervalle $[-2; 5]$ en 4 sous-intervalles, on calcule

$$h = \frac{5 - (-2)}{4} = \frac{7}{4}.$$

À l'aide de la formule $x_k = -2 + k \cdot \frac{7}{4}$, on obtient $x_0 = -2$, $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{13}{4}$ et $x_4 = 5$.

En pratique 4 (Construire une subdivision régulière)

Déterminer le pas et tous les points de la subdivision régulière demandée.

- | | |
|---|--|
| a) $[2; 8]$ en 3 sous-intervalles ; | b) $[-5; 3]$ en 4 sous-intervalles ; |
| c) $[\frac{1}{2}; 3]$ en 5 sous-intervalles ; | d) $[-\pi; 2\pi]$ en 6 sous-intervalles. |

Exemple 4 (Encadrer une aire avec des rectangles)

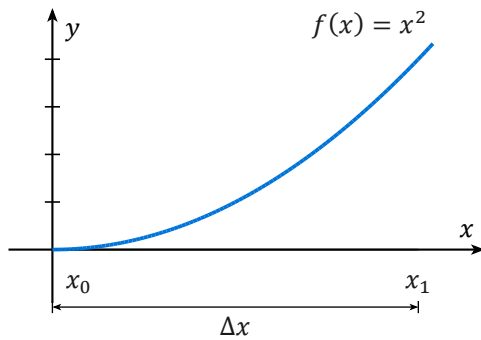
On considère l'aire A située sous la courbe de $f(x) = x^2$ entre 0 et 1.

Comment calculer l'aire sous cette courbe ?

Comme f est croissante sur $[0; 1]$, la hauteur prise au bord gauche de chaque sous-intervalle d'une subdivision régulière donne une somme inférieure s_n , tandis que la hauteur prise au bord droit donne une somme supérieure S_n . À chaque étape, on représente séparément ces deux sommes.

Un seul sous-intervalle. Le pas vaut $h = 1$. On pose

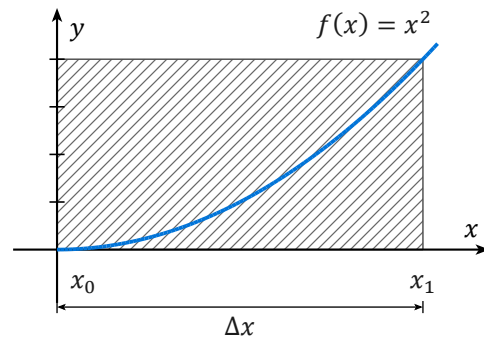
$$x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = 1.$$



Somme inférieure s_1 : bord gauche.

$$s_1 = 1 \cdot f(x_0) = 1 \cdot f(0) = 0,$$

$$S_1 = 1 \cdot f(x_1) = 1 \cdot f(1) = 1.$$

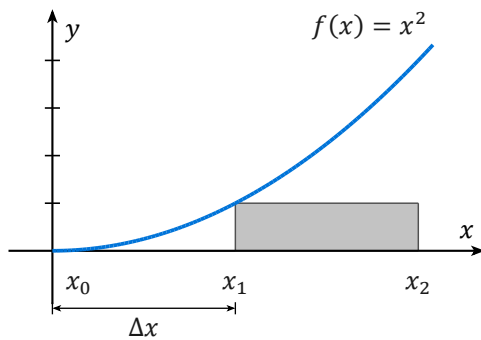


Somme supérieure S_1 : bord droit.

On obtient l'encadrement $0 \leq A \leq 1$.

Deux sous-intervalles. Le pas vaut $h = \frac{1}{2}$. On pose

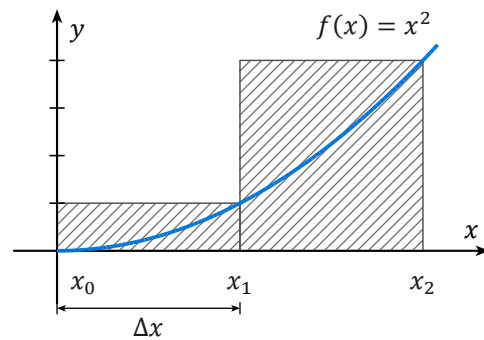
$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = 1.$$



Somme inférieure s_2 : bords gauches.

$$s_2 = \frac{1}{2}(f(x_0) + f(x_1)) = \frac{1}{2}\left(0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{8},$$

$$S_2 = \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2)) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2\right) = \frac{5}{8}.$$

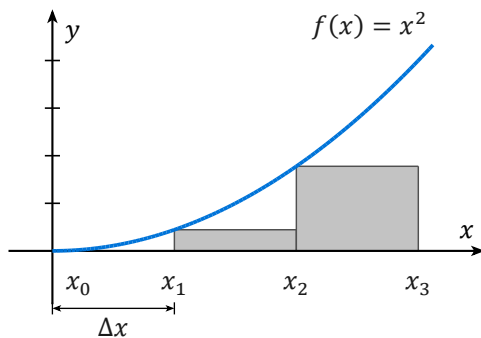


Somme supérieure S_2 : bords droits.

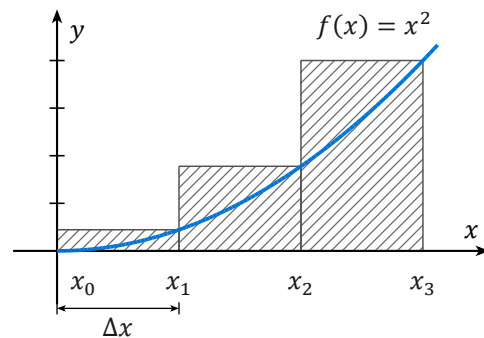
Ainsi, $\frac{1}{8} \leq A \leq \frac{5}{8}$.

Trois sous-intervalles. Le pas vaut $h = \frac{1}{3}$. On pose

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x_3 = 1.$$



Somme inférieure s_3 : bords gauches.



Somme supérieure S_3 : bords droits.

$$s_3 = \frac{1}{3}(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2))$$

$$= \frac{1}{3}\left(0^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = \frac{5}{27}$$

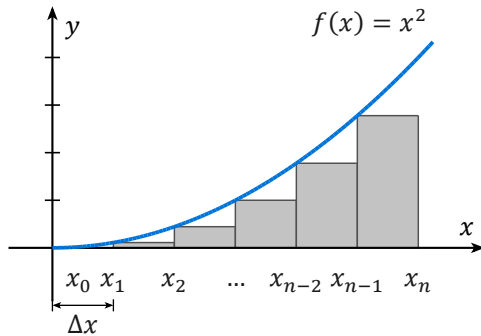
$$S_3 = \frac{1}{3}(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1^2\right) = \frac{14}{27}$$

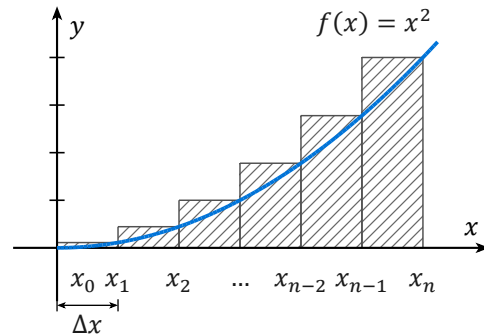
$$\text{Ainsi, } \frac{5}{27} \leq A \leq \frac{14}{27}$$

n sous-intervalles. Le pas vaut $h = \frac{1}{n}$. On pose

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{2}{n}, \quad \dots, \quad x_i = \frac{i}{n}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, \quad x_n = 1.$$



Somme inférieure s_n : bords gauches.



Somme supérieure S_n : bords droits.

Les schémas représentent quelques rectangles ; les points intermédiaires sont indiqués par des points de suspension. Dans le cas général,

$$s_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \quad \text{et} \quad S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2.$$

Rappel : somme des carrés. Pour tout entier $m \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^m i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

On peut maintenant simplifier les deux sommes :

$$s_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2},$$

$$S_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Lorsque n augmente, l'écart entre les deux encadrements tend vers zéro :

$$S_n - s_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

L'aire cherchée vaut donc $A = \frac{1}{3}$ unité d'aire.

1.3.2 Méthode de Darboux

Définition 3 (Sommes inférieure et supérieure de Darboux)

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et soit $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de cet intervalle, avec

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Sur chaque sous-intervalle $[x_{i-1}; x_i]$, on note

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x) \quad \text{et} \quad M_i = \max_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x).$$

En posant $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, on appelle :

- **somme inférieure de Darboux** la somme $s(f; P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$;
- **somme supérieure de Darboux** la somme $S(f; P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$.

On a toujours $s(f; P) \leq S(f; P)$.

Remarque (Lien avec l'exemple précédent)

Si P_n est la subdivision régulière de $[0; 1]$ en n sous-intervalles, alors, pour la fonction croissante $f(x) = x^2$,

$$s_n = s(f; P_n) \quad \text{et} \quad S_n = S(f; P_n).$$

En effet, le minimum de f sur chaque sous-intervalle est atteint au bord gauche et le maximum au bord droit. Les notations $s(f; P)$ et $S(f; P)$ rappellent que ces sommes dépendent à la fois de la fonction et de la subdivision choisie.

Théorème 1 (Convergence des sommes de Darboux)

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la subdivision régulière P_n de $[a; b]$ en n sous-intervalles et on pose

$$s_n = s(f; P_n) \quad \text{et} \quad S_n = S(f; P_n).$$

Alors les suites (s_n) et (S_n) convergent vers la même limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

Ce théorème est admis sans preuve.

 **Série 2** · exercice 1

1.4 L'intégrale définie

1.4.1 Définition

Définition 4 (Intégrale définie)

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle **intégrale définie de f entre a et b** le nombre commun vers lequel convergent les sommes inférieures et supérieures de Darboux. On le note

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

Les nombres a et b sont appelés les *bornes d'intégration* et x est la *variable d'intégration*.

Remarque

Dès maintenant, nous travaillons avec des fonctions qui sont continues

1.4.2 Propriétés

Propriétés (Premières propriétés)

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Propriété (Linéarité de l'intégrale)

Pour f et g deux fonctions et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b (\alpha f(x) + g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Propriété (Additivité de l'intégrale)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , alors pour tout $a, b, c \in I$, on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Proposition 1 (Respect de l'ordre)

Soit $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a; b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

1.5 Théorème fondamental du calcul intégral et applications

1.5.1 Primitive

Définition 5 (Primitive d'une fonction)

Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I . Une fonction F dérivable telle que $F' = f$ sur l'intervalle I s'appelle une primitive de f sur I .

On ne précise pas toujours l'intervalle I en question.

Exemple 5 (Une fonction polynomiale)

Cherchons une primitive de $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$. On traite chaque terme séparément :

$$F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x + C.$$

En effet, $F'(x) = 6x^2 - 4x + 3 = f(x)$.

Exemple 6 (Une composition)

Cherchons une primitive de $f(x) = 6x(3x^2 + 1)^4$. On pose $u(x) = 3x^2 + 1$, d'où $u'(x) = 6x$. On reconnaît alors la forme $u'(x)(u(x))^4$, donc

$$F(x) = \frac{1}{5}(3x^2 + 1)^5 + C.$$

En dérivant, on retrouve bien $F'(x) = \frac{1}{5} \cdot 5(3x^2 + 1)^4 \cdot 6x = f(x)$.

Exemple 7 (Une forme trigonométrique composée)

Cherchons une primitive de $f(x) = 4x \cos(2x^2 - 1)$. Avec $u(x) = 2x^2 - 1$, on a $u'(x) = 4x$. Comme la dérivée de $\sin(u(x))$ est $u'(x) \cos(u(x))$, une primitive est

$$F(x) = \sin(2x^2 - 1) + C.$$

En pratique 5 (Déterminer une primitive)

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f , puis contrôler le résultat en dérivant.

a) $f(x) = 8x^3 - 6x + 2$;

b) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 4}}$;

c) $f(x) = 10x(5x^2 - 2)^3$;

d) $f(x) = 6x \sin(3x^2)$.

Méthode 1 (Déterminer une primitive)

Déterminer une primitive revient à dériver « à l'envers ». Pour cela :

1. reconnaître une forme obtenue par une règle de dérivation connue ;
2. écrire une primitive candidate avec un coefficient k ;
3. dériver cette candidate, puis ajuster k pour retrouver exactement la fonction initiale.

Pour déterminer une seule primitive, on peut choisir la constante arbitraire $C = 0$.

Formes usuelles à reconnaître.

Forme de $f(x)$	Forme à essayer pour $F(x)$	Réglage de k
λ	$kx + C$	$k = \lambda$
$\lambda u'(x)(u(x))^r, r \neq -1$	$k(u(x))^{r+1} + C$	$k = \frac{\lambda}{r+1}$
$\lambda \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$k\sqrt{u(x)} + C$	$k = 2\lambda$
$\lambda \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$\frac{k}{u(x)} + C$	$k = -\lambda$
$\lambda u'(x) \cos(u(x))$	$k \sin(u(x)) + C$	$k = \lambda$
$\lambda u'(x) \sin(u(x))$	$k \cos(u(x)) + C$	$k = -\lambda$
$\lambda \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$	$k \tan(u(x)) + C$	$k = \lambda$

 Série 3 · exercices 1 à 5

Nous avons parlé d'une primitive jusqu'à présent, en effet, si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ alors $F(x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante sera également une primitive de $f(x)$. On a donc la proposition suivante.

Proposition 2 (À une constante près)

Soit F et G deux primitive de f , alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$F = G + C$$

Preuve. On a $(F - G)' = 0$ et donc $F - G$ est constant, d'où il existe $C \in \mathbb{R}$, une constante, telle que $F = G + C$. □

Remarque

Il existe une infinité de primitives pour une fonction continue donnée !

Exemple 8

Considérons les deux fonctions

$$F(x) = \sin^2(x) \quad \text{et} \quad G(x) = -\cos^2(x).$$

En dérivant (forme $\lambda u'(u(x))^r$ avec $r = 2$), on obtient

$$F'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) \quad \text{et} \quad G'(x) = -2 \cos(x) \cdot (-\sin(x)) = 2 \sin(x) \cos(x).$$

Les fonctions F et G sont donc deux primitives de la même fonction $f(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$, alors qu'elles ne se ressemblent pas du tout à première vue ! D'après la proposition, elles doivent différer d'une constante. En effet,

$$F(x) - G(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1,$$

par l'identité $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. La constante vaut donc $C = 1$.

En pratique 6 (Déterminer la primitive passant par un point)

Dans chaque cas, déterminer la primitive F de f vérifiant la condition donnée.

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ et $F(1) = 2$;

b) $f(x) = 2 \sin(x)$ et la courbe de F passe par le point $(\pi; 3)$;

c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$ et $F(4) = 7$.

 Série 3 · exercices 6 à 7

1.5.2 Théorème fondamental du calcul intégral

Théorème 2 (Théorème de la valeur moyenne)

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors

$$\exists c \in [a; b] \text{ tel que } \int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

Preuve. On utilise deux fois le théorème de la valeur intermédiaire dans cette preuve. La fonction f est continue sur un intervalle fermé, donc il existe $m, M \in [a; b]$ tels que

$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a; b].$$

Ainsi, par la proposition 1, p. 11

$$\begin{aligned} \int_a^b m dx &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx \\ m(b - a) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \\ m &\leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M. \end{aligned}$$

La fonction f étant continue, elle prend toutes les valeurs entre m et M et donc il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)$, ce qui prouve l'énoncé. $\square$

Série 4 · exercice 1

Théorème 3 (Théorème fondamental du calcul intégral, partie 1)

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors la fonction $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est une primitive de $f(x)$ sur $]a; b[$. En particulier, $F(x)$ est dérivable sur $]a; b[$.

Preuve. On doit montrer que pour tout $x \in]a; b[$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Soit donc $x \in]a; b[$, et soit $h > 0$. Par la propriété, p. 11, on a

$$F(x+h) = \underbrace{\int_a^x f(t) dt}_{=F(x)} + \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Alors il découle que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Par le théorème 2, p. 14, il existe $c_h \in [x; x+h]$ tel que

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = f(c_h) \cdot ((x+h) - x) = hf(c_h).$$

On a donc

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c_h).$$

Lorsque $h \rightarrow 0^+$, on a $c_h \rightarrow x^+$, et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(c_h) = \lim_{c \rightarrow x^+} f(c) = f(x).$$

Où on a utilisé dans la dernière égalité la continuité de f . L'affirmation dans le cas $h \rightarrow 0^-$ se montre de la même manière, ce qui prouve que pour tout $x \in]a; b[$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

□

Remarque

La fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la fonction de l'aire « signée » sous la courbe de la fonction f . Lorsque la fonction f est positive, cela correspond à l'aire géométrique sous la courbe comme étudiée jusqu'à présent. Nous verrons cela plus en détail à la section 5 (« Aire entre deux courbes »).

Théorème 4 (Théorème fondamental du calcul intégral, partie 2)

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si G est une primitive de f , alors

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

Preuve. On sait que la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f (théorème 3, p. 14). Par la proposition 2, p. 13, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$F(x) = G(x) + C.$$

Mais $F(a) = 0$, donc $0 = G(a) + C$, d'où $C = -G(a)$. Ceci implique que $F(x) = G(x) - G(a)$, et donc

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

□

Remarque (Notation)

On note souvent la différence $G(b) - G(a)$ à l'aide de crochets :

$$[G(x)]_a^b = G(b) - G(a).$$

Remarque (La constante d'intégration disparaît)

Le théorème dit que **n'importe quelle** primitive de f convient. En effet, si G est une primitive de f , les autres sont les $G(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$, et

$$[G(x) + C]_a^b = (G(b) + C) - (G(a) + C) = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b.$$

La constante se simplifie dans la soustraction. Pour calculer une intégrale définie, on choisit donc toujours la primitive la plus simple, celle avec $C = 0$, et on n'écrit pas de « $+C$ », car C est nul.

Exemple 9

Reprenons l'aire sous la parabole $f(x) = x^2$ entre 0 et 1, calculée laborieusement à l'aide des sommes de Darboux. Comme $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de $f(x) = x^2$, le théorème fondamental donne directement

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

On retrouve en une ligne le résultat $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{3}$.

🌊 Série 4 · exercices 2 à 4

1.5.3 Valeur moyenne d'une fonction

Définition 6 (Valeur moyenne)

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La **valeur moyenne** de f sur $[a; b]$ est le nombre

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Remarque

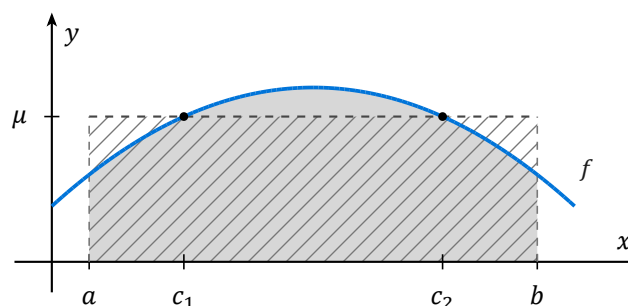
C'est bien une moyenne : on cumule les valeurs de f sur $[a; b]$ (c'est l'idée même derrière le concept de l'intégrale), puis on divise par la longueur de l'intervalle.

Remarque

Le théorème 2, p. 14 dit exactement que cette valeur est **atteinte** : il existe $c \in [a; b]$ tel que

$$f(c) = \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Géométriquement, le rectangle de base $[a; b]$ et de hauteur μ a la même aire que la région sous la courbe : c'est le rectangle qui « aplanit » la courbe. Ce qui dépasse au-dessus de μ compense exactement ce qui manque en dessous. Le nombre c est une abscisse où la courbe coupe le haut de ce rectangle, et il n'est pas forcément unique : sur la figure ci-dessous, il y en a deux.



Le rectangle hachuré et la région grise ont la même aire.

Exemple 10

Calculons la valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur $[0; 3]$. On a

$$\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9, \quad \text{donc} \quad \mu = \frac{1}{3-0} \cdot 9 = 3.$$

Cherchons le c annoncé par le théorème : il vérifie $f(c) = 3$, c'est-à-dire $c^2 = 3$, d'où $c = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1,73$, avec $\sqrt{3}$ qui appartient bien à $[0; 3]$. La solution $c = -\sqrt{3}$ est à rejeter, elle est hors de l'intervalle.

En pratique 7 (Calculer une valeur moyenne)

Dans chaque cas, déterminer la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle donné, puis le nombre c annoncé par le théorème de la moyenne.

a) $f(x) = 4 - x^2$ sur $[0; 2]$;

b) $f(x) = x^3$ sur $[0; 2]$.

Méthode 2 (Calculer une valeur moyenne)

Pour déterminer la valeur moyenne de f sur $[a; b]$:

1. calculer $\int_a^b f(x) dx$ à l'aide du théorème fondamental ;
2. diviser le résultat par la longueur $b - a$ de l'intervalle ;
3. si le nombre c est demandé, résoudre l'équation $f(c) = \mu$ et ne garder que les solutions situées dans $[a; b]$. Il peut y en avoir plusieurs.

Un bon réflexe de contrôle : μ doit toujours être compris entre le minimum et le maximum de f sur $[a; b]$.

 **Série 5** · exercices 1 à 3

1.5.4 Applications et calculs**Proposition 3 (Variation d'une grandeur)**

Soit Q une grandeur dérivable dont le taux de variation $Q' = f$ est continu sur $[a; b]$. Alors

$$Q(b) - Q(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

Autrement dit, l'intégrale d'un taux de variation donne la variation totale de la grandeur entre a et b .

Preuve. Q est une primitive de f , il suffit donc d'appliquer le théorème 4, p. 15. □

Remarque (Unités)

Les unités se lisent sur le produit « hauteur $\times$ largeur » : l'intégrale s'exprime en (unité de f) $\times$ (unité de t) :

1. un débit en litres par seconde intégré sur des secondes donne des litres ;
2. une puissance en watts intégrée sur des heures donne des wattheures ;
3. une vitesse en mètres par seconde intégrée sur des secondes donne des mètres.

On retrouve ainsi les situations évoquées au début du chapitre.

Exemple 11

La vitesse d'un mobile est $v(t) = 3 + 2t$, en mètres par seconde, pour t entre 0 et 4 secondes. La distance parcourue est la variation de la position, donc l'intégrale de la vitesse :

$$d = \int_0^4 (3 + 2t) dt = [3t + t^2]_0^4 = 12 + 16 = 28 \text{ m.}$$

La vitesse moyenne sur ces 4 secondes vaut alors $\mu = \frac{28}{4} = 7 \text{ m/s}$: un mobile roulant à 7 m/s constants parcourrait la même distance.

Méthode 3 (Calculer une intégrale définie)

Pour calculer $\int_a^b f(x) dx$:

1. si l'intégrande (la fonction à intégrer) ne ressemble à aucune forme connue, le réécrire : développer un produit, séparer une fraction terme à terme, simplifier ;
2. repérer une forme du tableau des formes usuelles, en identifiant u et u' ;
3. écrire une primitive F en ajustant le coefficient, avec $C = 0$ (remarque, p. 15) ;
4. appliquer les crochets : $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Deux erreurs à éviter : on n'intègre pas séparément le numérateur et le dénominateur d'une fraction, et en général $\int_a^b f(x)g(x) dx \neq \left(\int_a^b f(x) dx\right) \cdot \left(\int_a^b g(x) dx\right)$.

En pratique 8 (Accumuler une grandeur, calculer une intégrale)

- a) Un réservoir d'eau se remplit avec un débit $d(t) = 12 - t$, en litres par minute, pour t entre 0 et 10 minutes. Quel volume d'eau contient-il au bout de ces 10 minutes, et quel est le débit moyen ?
- b) Calculer $\int_0^1 x(x^2 + 1)^3 dx$.

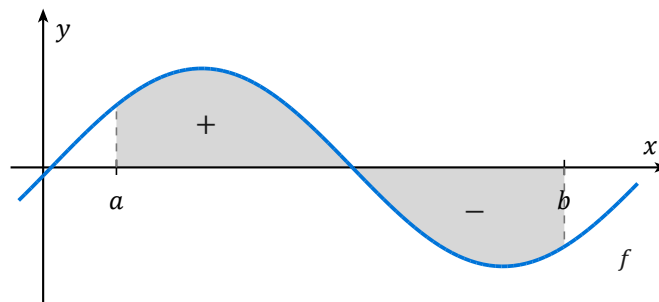
→ **Série 5** · exercices 4 à 6

1.6 Aire entre deux courbes**Définition 7 (Aire signée)**

L'aire signée délimitée par le graphe d'une fonction f et l'axe Ox entre les droites $x = a$ et $x = b$ est donnée par l'intégrale

$$\int_a^b f(x) dx$$

Les portions situées au-dessus de l'axe comptent positivement, celles situées en dessous comptent négativement.



Géométriquement, seule une aire positive a du sens.

Définition 8 (Aire géométrique)

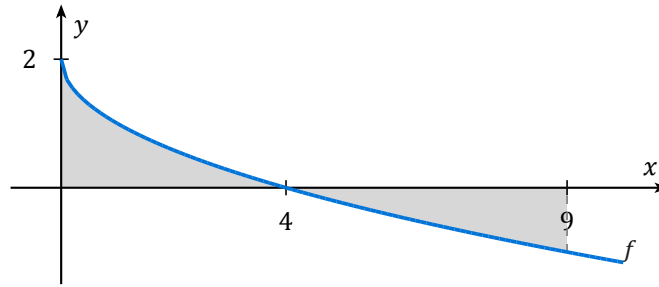
L'aire géométrique A délimitée par le graphe d'une fonction f et l'axe Ox entre les droites $x = a$ et $x = b$ est donnée par l'intégrale

$$A = \int_a^b |f(x)| dx.$$

En pratique, on découpe $[a; b]$ aux zéros de f : sur les morceaux où $f \geq 0$, on intègre f ; sur les morceaux où $f \leq 0$, on intègre $-f$. Toutes les contributions sont alors positives et il ne reste qu'à les additionner.

Exemple 12

Calculons l'aire géométrique A de la région du plan délimitée par la courbe $y = f(x) = 2 - \sqrt{x}$, les axes Ox et Oy et la droite $x = 9$.



Remarquons que f change de signe en $x = 4$. Donc

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^9 |f(x)| \, dx \\
 &= \int_0^4 f(x) \, dx + \int_4^9 [-f(x)] \, dx \\
 &= \int_0^4 [2 - \sqrt{x}] \, dx + \int_4^9 [-2 + \sqrt{x}] \, dx \\
 &= \left[2x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 + \left[-2x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_4^9 \\
 &= \left(8 - \frac{2}{3} \cdot 8 \right) - 0 + \left(-2 \cdot 9 + \frac{2}{3} \cdot 27 \right) - \left(-8 + \frac{2}{3} \cdot 8 \right) \\
 &= \frac{16}{3}.
 \end{aligned}$$

En pratique 9 (Calculer une aire géométrique)

Dans chaque cas, calculer l'aire géométrique délimitée par le graphe de f et l'axe Ox sur l'intervalle donné.

a) $f(x) = x^2 - 1$ sur $[0; 2]$;

b) $f(x) = x^3$ sur $[-1; 2]$.

Méthode 4 (Calculer une aire sous une courbe)

Pour calculer l'aire géométrique délimitée par le graphe de f et l'axe Ox entre $x = a$ et $x = b$:

1. esquisser la courbe de f sur $[a; b]$;
2. résoudre $f(x) = 0$ pour trouver les zéros de f situés dans $[a; b]$;
3. découper $[a; b]$ en sous-intervalles délimités par ces zéros ;
4. déterminer **une seule fois** une primitive F de f , avec $C = 0$ (remarque, p. 15). Il est inutile de chercher une primitive de $-f$, car elle est donnée par $-F$;
5. sur chaque sous-intervalle $[\alpha; \beta]$, calculer $[F(x)]_\alpha^\beta$ si la courbe y est au-dessus de l'axe Ox , et $-[F(x)]_\alpha^\beta$ si elle est en dessous ;
6. additionner les résultats obtenus, qui sont tous positifs. L'aire s'exprime en unités d'aire.

Définition 9 (Aire entre deux courbes)

L'aire géométrique A de la région du plan comprise entre les graphes de deux fonctions f et g , entre les droites $x = a$ et $x = b$, est donnée par l'intégrale

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx.$$

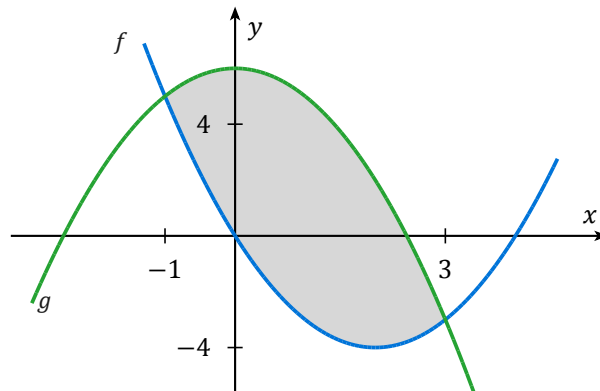
Sur un intervalle où le graphe de g est au-dessus de celui de f , on a $|f(x) - g(x)| = g(x) - f(x)$. Dans ce cas, la fonction à intégrer est la différence de celle du « dessus » (g) moins celle du « dessous » (f).

Exemple 13

Calculons l'aire A de la région bornée, délimitée par les courbes

$$f(x) = x^2 - 4x, \quad g(x) = 6 - x^2.$$

Un simple croquis permet de comprendre la situation :



Commençons par chercher les points d'intersection des deux graphes :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^2 - 4x = 6 - x^2 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x + 2)(x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3. \end{aligned}$$

Comme le graphe de g est au-dessus de celui de f sur $[-1; 3]$, on a $|f(x) - g(x)| = g(x) - f(x)$ sur cet intervalle, et donc l'aire cherchée vaut

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^3 |f(x) - g(x)| \, dx \\ &= \int_{-1}^3 g(x) - f(x) \, dx \\ &= \int_{-1}^3 (6 - x^2) - (x^2 - 4x) \, dx \\ &= \int_{-1}^3 -2x^2 + 4x + 6 \, dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x \right]_{-1}^3 \\ &= 18 - \left(-\frac{10}{3} \right) = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

En pratique 10 (Calculer une aire entre deux courbes)

Dans chaque cas, calculer l'aire de la région bornée délimitée par les deux courbes.

a) $y = x^2$ et $y = x + 2$;

b) $y = x^3$ et $y = x$.

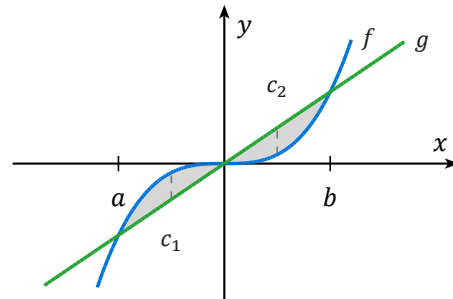
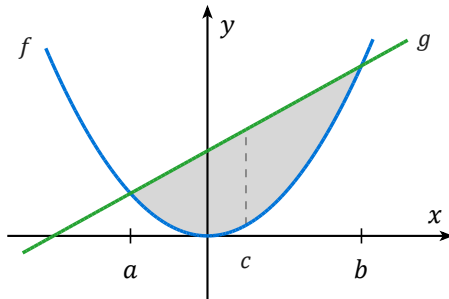
Méthode 5 (Calculer l'aire entre deux courbes)

Pour calculer l'aire de la région délimitée par les graphes de f et g entre $x = a$ et $x = b$:

1. esquisser les deux courbes sur $[a; b]$;
2. résoudre $f(x) = g(x)$: les solutions sont les abscisses d'intersection, qui découpent $[a; b]$ en sous-intervalles ;
3. sur chaque sous-intervalle, déterminer laquelle des deux courbes est au-dessus de l'autre, par exemple en comparant $f(c)$ et $g(c)$ en un point témoin c choisi à l'intérieur du sous-intervalle ;

4. déterminer **une seule fois** une primitive H de la différence $f - g$, avec $C = 0$ (remarque, p. 15). Une primitive de $g - f$ est alors $-H$;
5. sur chaque sous-intervalle $[\alpha; \beta]$, calculer $[H(x)]_\alpha^\beta$ là où f est au-dessus de g , et $-[H(x)]_\alpha^\beta$ là où g est au-dessus de f ;
6. additionner les résultats obtenus, qui sont tous positifs.

Les deux configurations à distinguer à l'étape 3 sont les suivantes.



Un seul morceau : $g(c) > f(c)$, donc $A = \int_a^b (g - f) dx$. Deux morceaux : $f(c_1) > g(c_1)$ mais $g(c_2) > f(c_2)$, donc $A = \int_a^{c_1} (f - g) dx + \int_{c_1}^b (g - f) dx$.

→ **Série 6** · exercices 1 à 4

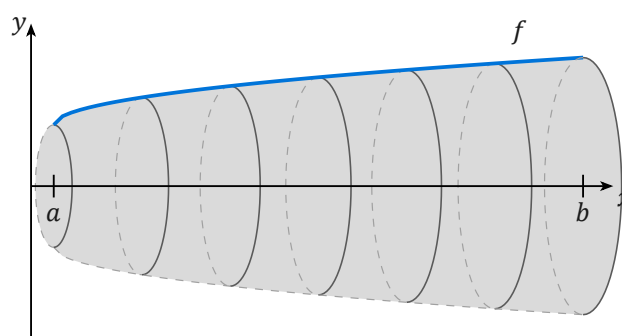
→ **Série 7** · exercices 1 à 3

1.7 Volumes de révolution

Définition 10 (Volume de révolution)

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. En faisant tourner autour de l'axe Ox la région comprise entre le graphe de f et cet axe, on engendre un solide de révolution. La section de ce solide par le plan vertical d'abscisse x est un disque de rayon $|f(x)|$, donc d'aire $\pi(f(x))^2$. Le volume du solide vaut

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$



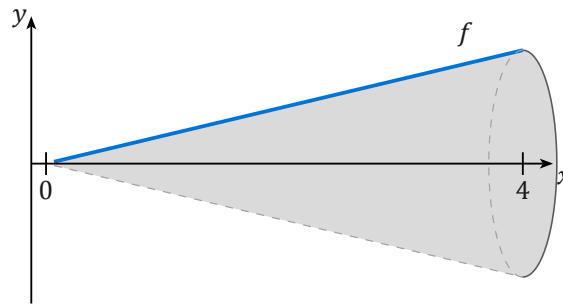
Remarque

C'est le **carré** de f que l'on intègre, et non f : en général $\int_a^b (f(x))^2 dx \neq \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2$. Il faut donc développer $(f(x))^2$ avant de chercher une primitive.

En revanche, le signe de f n'a aucune importance ici, puisque $(f(x))^2 \geq 0$: contrairement au calcul d'aire, il est inutile de découper $[a; b]$ aux zéros de f .

Exemple 14

Calculons le volume du cône engendré par la rotation autour de l'axe Ox du domaine délimité par la droite $y = f(x) = \frac{x}{2}$, l'axe Ox et la droite $x = 4$.



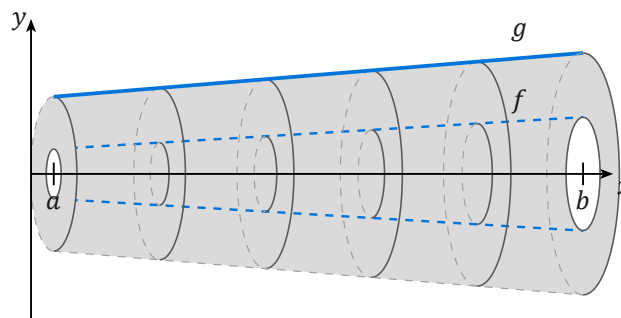
$$V = \pi \int_0^4 \left(\frac{x}{2}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 \frac{x^2}{4} dx = \pi \left[\frac{x^3}{12} \right]_0^4 = \pi \left(\frac{64}{12} - 0 \right) = \frac{16}{3} \pi.$$

Il s'agit bien d'un cône de rayon $r = f(4) = 2$ et de hauteur $h = 4$: on retrouve la formule connue $V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 4}{3} = \frac{16\pi}{3}$.

Définition 11 (Volume entre deux surfaces de révolution)

Soient f et g deux fonctions continues telles que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ sur $[a; b]$. Le solide engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la région comprise entre les deux graphes est creux : sa section d'abscisse x est une couronne de rayon extérieur $g(x)$ et de rayon intérieur $f(x)$, donc d'aire $\pi(g(x))^2 - \pi(f(x))^2$. Son volume vaut

$$V = \pi \int_a^b [(g(x))^2 - (f(x))^2] dx.$$

**Remarque**

On soustrait les carrés, pas les fonctions : $(g(x))^2 - (f(x))^2 \neq (g(x) - f(x))^2$. Le cas de la définition 10, p. 21 correspond à $f = 0$.

En pratique 11 (Calculer un volume de révolution)

Calculer le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la région décrite.

- région délimitée par $y = \sqrt{x}$, l'axe Ox et la droite $x = 4$;
- région délimitée par les courbes $y = x$ et $y = x^2$.

Méthode 6 (Calculer un volume de révolution)

Pour calculer le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe Ox d'une région du plan :

- esquisser la région et repérer, si on a plus qu'une fonction le rayon intérieur et extérieur ;
- déterminer les bornes a et b : soit elles sont données, soit on résout $f(x) = g(x)$;
- écrire $V = \pi \int_a^b [(g(x))^2 - (f(x))^2] dx$, avec $f = 0$ lorsque la région touche l'axe ;
- développer l'intégrande, en déterminer une primitive H avec $C = 0$ (remarque, p. 15), puis conclure par $V = \pi[H(x)]_a^b$, en unités de volume. On garde le facteur π tel quel.