

Série 1**Aires, sommes et premières intégrales****Rappels sur les dérivées****Exercice 1**Calculer les fonctions dérivées des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \frac{x-2}{3-x}$

b) $f(x) = \frac{2x+3}{4-x}$

c) $f(x) = \frac{x-x^3}{2-x}$

d) $f(x) = \frac{x^2+4}{2-x}$

e) $f(x) = \frac{x^3-x^2}{4-x}$

f) $f(x) = \frac{x-7}{x^2-3}$

g) $f(x) = \frac{4-x^2}{x+7}$

h) $f(x) = \frac{4-x^3}{x-5}$

i) $f(x) = \frac{8x^2-7}{3x-5}$

j) $f(x) = (x^2-3)(4x-5)$

Exercice 2Calculer les fonctions dérivées des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = (3x^2-7x)(4x^2-5)$

b) $f(x) = (7x^2-3x)(x^4-2x^3)$

c) $f(x) = (x^2-3)(2x+4)$

d) $f(x) = (x^3-1)(4x^2+x-2)$

e) $f(x) = (8x^2+3x-1)(2x^2-4)$

f) $f(x) = (4x^2-7)(3-5x)$

g) $f(x) = (x^2+3)(3-4x^2)$

h) $f(x) = \frac{(x^2-3x)(4x+2)}{x-5}$

i) $f(x) = \frac{(4x-5)(7x-2)}{3x^2-1}$

j) $f(x) = \frac{(x-5)(3-2x)}{4x+2}$

Exercice 3Calculer les fonctions dérivées des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \frac{(x^2-3x)(4x-5)}{2x^3-5x+2}$

b) $f(x) = \frac{(x-7)(x^3-5)}{4-x^2}$

c) $f(x) = \frac{(7-x)(3-x^2)}{x^3-1}$

d) $f(x) = \frac{(x-4)(3x-7)}{x^2-4x+2}$

e) $f(x) = (x-7)(3x+2)(4x^2-3)$

f) $f(x) = 5\sqrt{3x^4+5x+2}$

g) $f(x) = 8\sqrt{2x^3-5}$

h) $f(x) = 7\sqrt{4x^2+3}$

i) $f(x) = (x^2+3)^3(2x+4)$

j) $f(x) = (4x^3-5)^2(2x^3+1)$

Exercice 4

Calculer les fonctions dérivées des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = (3x^2 + 5)^3(4x + 7)$

b) $f(x) = \frac{(3x^2 + 5)^2}{x^3 + 4}$

c) $f(x) = \frac{7x^2 + 3}{(2x^3 + 4x)^2}$

d) $f(x) = \frac{4x^2 + 5}{(3x + 2)^3}$

e) $f(x) = \frac{(2x + 4)(3x^2 + 5)^2}{(2x^2 + 3)^2}$

f) $f(x) = \frac{\sqrt{3x^4 - 5}}{(2x^2 + 3)^2}$

g) $f(x) = \frac{\sqrt{2x - 2}(3x^2 - 4)}{2x - 1}$

h) $f(x) = (5x^2 - 6x + 9) \cdot \sqrt[3]{(x + 1)^2}$

i) $f(x) = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$

Exercice 5

Calculer les fonctions dérivées des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \sin(x) + 2 \cos(x)$

b) $f(x) = \sin(x) \cos(x)$

c) $f(x) = (\sin(x) + 2 \cos(x)) \cos(x)$

d) $f(x) = \frac{\sin(x) + 1}{\sin(x) - 1}$

e) $f(x) = \frac{\cos(x) + 2}{\cos(x) + 3}$

f) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 3 \cos(4x)$

g) $f(x) = 6 \cos\left(\frac{x}{3}\right) - 4 \sin\left(\frac{3x}{2}\right)$

h) $f(x) = 2 \cos(x) - \cos(2x)$

i) $f(x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^3(4x)$

j) $f(x) = \frac{\sin(3x)}{\cos(5x)}$

k) $f(x) = 1 + \frac{\sin^3(x)}{\cos(x)}$

l) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

m) $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right)$

n) $f(x) = 2 \sin^2(x) + 5 \sin(x) - 3$

o) $f(x) = 2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - 3 \sin(4x)$

p) $f(x) = 4 \sin^3(x) - 3 \sin(x) + 2$

q) $f(x) = 3 \sin^4(x) + \cos^4(x) - 1$

r) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{3}\right)$

Exercice 6

Calculer les fonctions dérivées des fonctions f suivantes :

a) $f(x) = 4 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$

b) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$

c) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(2x)}$

d) $f(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos^2(2x)}$

$$e) f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2} \cos(x) + 1)^2}$$

$$f) f(x) = \frac{2}{\sin(2x)} - \frac{1}{\sin(x)}$$

$$g) f(x) = \sqrt{\cos(2x) + 3 \sin^2(x)}$$

$$h) f(x) = x - \sin(x) \cos(x)$$

$$i) f(x) = \cos(x)(\sin^2(x) + 2)$$

$$j) f(x) = \sin(x) \cos(x)(2 \cos^2(x) + 3) + 3x$$

$$k) f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^3(x)} + 2 \cot(x)$$

$$l) f(x) = \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\cos(x) + x \sin(x)}$$

$$m) f(x) = \frac{\tan(x)}{a + (ax + b) \tan(x)}$$

$$n) f(x) = \frac{\cos(x) + x \sin(x)}{\sin(x) - x \cos(x)}$$

$$o) f(x) = 2x \cos(x) + (x^2 - 2) \sin(x)$$

$$p) f(x) = \frac{1+x}{1-x} \arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)$$

$$q) f(x) = \arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)$$

Exercice 7

Calculer la dérivée des fonctions suivantes. (Ces dérivées seront réutilisées tout au long du chapitre.)

$$a) f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$$

$$b) f(x) = \sqrt{x}$$

$$c) f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$d) f(x) = (2x + 1)^3$$

$$e) f(x) = \sin(3x)$$

$$f) f(x) = x \cos(x)$$

$$g) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$h) f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$$

$$i) f(x) = \cos^2(x)$$

Notation sigma

Exercice 8

$$a) \text{ Développer puis calculer : } \sum_{i=1}^5 (2i - 1) ;$$

$$b) \text{ Développer puis calculer : } \sum_{k=0}^5 k^2 ;$$

$$c) \text{ Écrire en notation sigma : } 1 + 4 + 9 + 16 + \dots + 100 ;$$

$$d) \text{ Écrire en notation sigma : } 3 + 6 + 9 + \dots + 30 ;$$

$$e) \text{ Développer puis calculer : } \sum_{i=2}^5 \frac{1}{i} ;$$

$$f) \text{ Écrire en notation sigma : } 2 + 4 + 8 + 16 + 32 ;$$

g) Vrai ou faux ? Justifier ou donner un contre-exemple :

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n a_i b_i = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)$$

Exercice 9

On rappelle les formules :

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- a) Calculer $1 + 2 + 3 + \dots + 100$;
- b) Calculer $1^2 + 2^2 + \dots + 20^2$;
- c) Exprimer $\sum_{i=1}^n (2i + 1)$ en fonction de n (forme factorisée ou développée) ;
- d) Calculer $\sum_{i=50}^{1001} i$;
- e) Calculer $\sum_{i=1}^{30} (4i - 2)$;
- f) Démontrer que $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$;
- g) Déterminer l'entier n tel que $1 + 2 + \dots + n = 210$.

Aire sous une courbe

Exercice 10

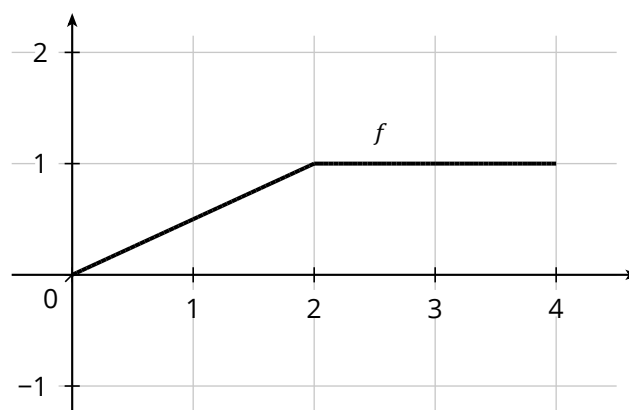
Un mobile se déplace en ligne droite. Sa vitesse (en m/s) est donnée par :

$$v(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t \leq 5 \\ 10 & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

- a) Représenter graphiquement v sur $[0; 10]$;
- b) Calculer l'aire sous la courbe de v sur $[0; 5]$, puis sur $[5; 10]$;
- c) En déduire la distance totale parcourue entre $t = 0$ et $t = 10$;
- d) Justifier, à l'aide des unités, que l'aire sous une courbe de vitesse représente une distance ;
- e) Calculer la distance parcourue entre $t = 3$ et $t = 5$ seulement ;
- f) Calculer la vitesse moyenne du mobile sur $[0; 10]$;
- g) Un second mobile roule à la vitesse constante de 7,5 m/s pendant 10 secondes. Comparer les distances parcourues par les deux mobiles et interpréter géométriquement.

Exercice 11

On considère la fonction f , définie sur $[0; 4]$ par sa représentation graphique :

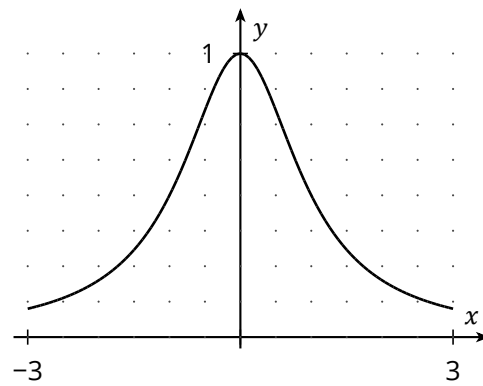


- a) Déterminer l'expression fonctionnelle de f ; (par morceaux)
- b) Exprimer l'aire $A(x)$ de la surface ombrée en fonction de x pour $x \in [0; 4]$;
- c) Quel lien y a-t-il entre f et A sur l'intervalle $[0; 4]$?

Exercice 12

On considère la fonction f représentée sur $[-3; 3]$ ci-dessous :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$



Chaque carré de la grille a pour dimensions $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{8}$.

Justifier l'encadrement ci-dessous, en vous aidant de la figure et des sommes inférieures et supérieures.

$$\frac{7}{4} < A < \frac{13}{4}$$