

Série 2

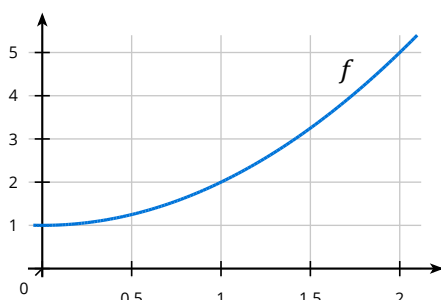
Sommes de Riemann et propriétés de l'intégrale

Sommes inférieures, supérieures et de Riemann

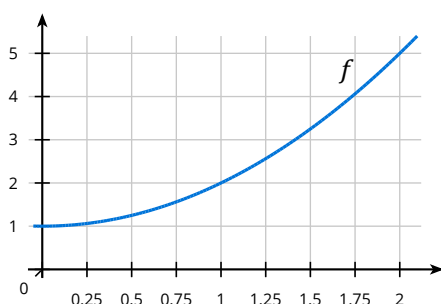
Exercice 1

On veut estimer l'aire sous la courbe de $f(x) = x^2 + 1$ sur l'intervalle $[0; 2]$.

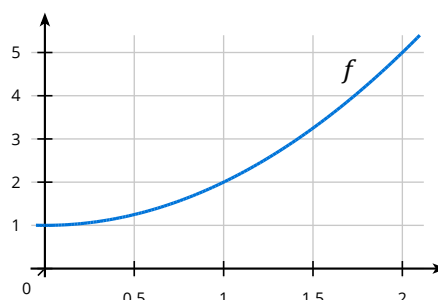
4 rectangles à gauche



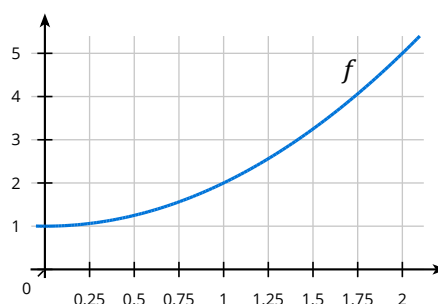
8 rectangles à gauche



4 rectangles à droite



8 rectangles à droite



- Découper $[0; 2]$ en 4 sous-intervalles de même largeur et calculer la somme des aires des rectangles construits **à gauche** (hauteur prise au bord gauche de chaque sous-intervalle) ;
- Faire de même avec les rectangles construits **à droite** ;
- En déduire un encadrement de l'aire cherchée ;
- Expliquer pourquoi la somme à gauche minore l'aire et la somme à droite la majore ;
- Recommencer le calcul de la somme à gauche avec 8 rectangles ;
- Recommencer le calcul de la somme à droite avec 8 rectangles ;
- Comparer la largeur des deux encadrements obtenus. Que peut-on conjecturer pour la largeur de l'encadrement avec n rectangles, et vers quelle valeur semble-t-on tendre ?

Exercice 2

On considère la fonction $f(x) = 4 - x^2$ sur l'intervalle $[0; 2]$, découpé en n sous-intervalles de même largeur.

- Justifier que f est décroissante sur $[0; 2]$. Sur chaque sous-intervalle, en quel bord la somme inférieure prend-elle la hauteur de son rectangle ? (Comparer avec le cas d'une fonction croissante.)
- Calculer $S_{\text{inf}}(4)$;
- Calculer $S_{\text{sup}}(4)$ et en déduire un encadrement de l'aire sous la courbe ;
- Calculer $S_{\text{inf}}(8)$;

- e) Calculer $S_{\text{sup}}(8)$;
- f) Comparer la largeur des deux encadrements et l'exprimer en fonction de Δx , $f(0)$ et $f(2)$.

Exercice 3

On considère la fonction $f(x) = x + 1$ sur l'intervalle $[0; 2]$, découpé en n sous-intervalles de même largeur.

- a) Exprimer $S_{\text{sup}}(n)$ en fonction de n ;
- b) Exprimer $S_{\text{inf}}(n)$ en fonction de n ;
- c) Calculer les limites de $S_{\text{inf}}(n)$ et de $S_{\text{sup}}(n)$ lorsque $n \rightarrow \infty$;
- d) Vérifier le résultat par un calcul d'aire élémentaire (la région est un trapèze) ;
- e) Montrer que $S_{\text{sup}}(n) - S_{\text{inf}}(n) = \frac{4}{n}$ et déterminer le plus petit entier n pour lequel cet écart est inférieur à 0,01 ;
- f) Plus généralement, pour une fonction **croissante** sur $[a; b]$, exprimer $S_{\text{sup}}(n) - S_{\text{inf}}(n)$ à l'aide de Δx , $f(a)$ et $f(b)$, et justifier.

Rappel : $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 4

On considère la fonction donnée par $f(x) = 2x$. En utilisant les sommes inférieures et supérieures et une subdivision de l'intervalle $[1; 5]$ en n parties égales :

- a) Calculer $S_{\text{inf}}(n)$ et $S_{\text{sup}}(n)$.
- b) Que se passe-t-il si $n \rightarrow \infty$?
- c) Comparer avec l'aire sous la courbe de f obtenue par la formule de l'aire du trapèze.

Exercice 5

On considère la fonction $f(t) = t$, avec $x > 0$, sur l'intervalle $[0; x]$.

- a) Représenter graphiquement la fonction sur $[0; x]$. En utilisant la formule de l'aire d'un triangle, conjecturer l'aire située sous la courbe.
- b) Pour une subdivision régulière de $[0; x]$ en n sous-intervalles, calculer la somme inférieure s_n et la somme supérieure S_n .
- c) Déterminer les limites de s_n et S_n lorsque $n \rightarrow +\infty$, puis les comparer à la conjecture graphique.

Exercice 6

On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[1; 2]$.

- a) Découper $[1; 2]$ en 4 sous-intervalles de même largeur et calculer $S_{\text{sup}}(4)$ (valeur exacte puis approchée) ;
- b) Calculer $S_{\text{inf}}(4)$;
- c) En déduire un encadrement de l'aire sous la courbe et calculer la largeur de cet encadrement ;
- d) Refaire les calculs avec $n = 2$ sous-intervalles ;
- e) Comparer les largeurs des encadrements obtenus pour $n = 2$ et $n = 4$. Que constate-t-on ?
- f) Proposer, à partir de $S_{\text{inf}}(4)$ et $S_{\text{sup}}(4)$, une estimation raisonnable de l'aire.

Retrouver une fonction à partir de sa dérivée

Exercice 7

Déterminer un candidat pour $f(x)$ dans les cas suivants sur le domaine de définition de f :

$$f'_1(x) = 6 + 8x^5$$

$$f'_2(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$f'_3(x) = \sin(5x)$$

$$f'_4(x) = \frac{1}{\sqrt{3-5x}}$$

$$f'_5(x) = 3x^4 + 2x - 3$$

$$f'_6(x) = 2 \cos(2x)$$

Exercice 8

Déterminer $f(x)$ dans les cas suivants sur leur domaine de définition :

$$f'_1(x) = x^2(x^3 + 2)^3$$

$$f'_2(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$f'_3(x) = \frac{6x}{(5-3x^2)^3}$$

$$f'_4(x) = \sin(2x) \cos^3(2x)$$

$$f'_5(x) = \frac{1}{(3x+5)^2}$$

$$f'_6(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$