

Entraînement technique

✚ Exercice 1

Déterminer une primitive de la fonction f définie sur l'ensemble I .

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 5x + 1, I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{x^3 - 5x + 3}{2}, I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = 2 - \frac{1}{x^2}, I =]0; +\infty[$

d) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}, I =]0; +\infty[$

e) $f(x) = \frac{1}{(2-x)^2}, I =]-\infty; 2[$

f) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3x+1}}, I =]-\frac{1}{3}; +\infty[$

g) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}, I =]1; +\infty[$

h) $f(x) = \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+5x-6}}, I =]2; 5[$

i) $f(x) = (2x-1)(x^2-x)^3, I = \mathbb{R}$

j) $f(x) = \cos(3x) + \sin(2x), I = \mathbb{R}$

✚ Exercice 2

Déterminer la primitive F_i de f_i qui vérifie les conditions données.

a) $f_1(x) = \frac{2}{x^2} + x$ et $F_1(1) = 0$

b) $f_2(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$ et $F_2(0) = 0$

c) $f_3(x) = \frac{1}{x^3}$ et $F_3(-1) = 1$

d) $f_4(x) = \frac{x^2}{(x^3-1)^2}$ et $F_4(-1) = \frac{3}{2}$

e) $f_5(x) = x^2 - 2x - \frac{1}{2}$ et $F_5(0) = 0$

f) $f_6(x) = \frac{1}{2x^3}$ et $F_6(1) = 1$

✚ Exercice 3

Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \frac{8x^2}{(x^3+2)^3}$

b) $f(x) = \frac{4x^2}{\sqrt{x^3+8}}$

c) $f(x) = \frac{6x}{(5-3x^2)^2}$

d) $f(x) = \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{x})^{13}}{\sqrt{x}}$

e) $f(x) = x^2\sqrt{x^3+1}$

f) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{4+x^4}}$

g) $f(x) = x^2(x^3+2)^2$

h) $f(x) = \frac{x^2}{(x^3+2)^{\frac{1}{4}}}$

i) $f(x) = \sin(5x)$

j) $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^4(x)}$

k) $f(x) = \sin(2x) \cdot \cos^3(2x)$

l) $f(x) = \frac{\cos(3x)}{\sqrt{3+\sin(3x)}}$

m) $f(x) = 2(3x^2-2x)(x^3-x^2+1)^5$

n) $f(x) = \sin(x)\sqrt{\cos(x)}$

o) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{4-\cos(x)}}$

p) $f(x) = \frac{16x}{(2x^2-1)^3}$

✚ Exercice 4

Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 6 + 8x^5$

b) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

d) $f(x) = 3x^5 + \sqrt{x}$

e) $f(x) = \frac{2}{x^3}$

f) $f(x) = \sqrt{x}(3x-2)$

g) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

i) $f(x) = \sqrt{-3x}$

j) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{x^2} - x\sqrt{x}$

k) $f(x) = \sqrt{9+4x}$

l) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-4x}}$

m) $f(x) = (2x+1)^n,$
 $n \in \mathbb{N}$

n) $f(x) = \frac{1}{(7+3x)^3}$

o) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x}}$

p) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

Primitives à une constante près

Exercice 5 Dériver les fonctions f et g données par :

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \quad g(x) = -\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

Quel lien peut-on en déduire entre f et g ? (Calculer la constante annoncée)

Exercice 6 Déterminer dans chaque cas si les fonctions F et G données sont des primitives de la même fonction sur l'intervalle I . Si oui, déterminer la constante annoncée par le théorème.

- a) $I =]1; +\infty[; F(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1} ; G(x) = \frac{x^2 + 7x - 5}{x - 1}$
 b) $I =]\frac{5}{4}; +\infty[; F(x) = \frac{2x^2 - 3x + 7}{4x - 5} ; G(x) = \frac{-4x^2 + 2x - 9}{10 - 8x}$
 c) $I = \mathbb{R} ; F(x) = \frac{1}{x^2 + 1} ; G(x) = \frac{5 + 3x^2}{2(1 + x^2)}$

Exercice 7 Déterminer la primitive F de la fonction f sur I , telle que $F(x_0) = y_0$.

- a) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1 ; I = \mathbb{R} ; x_0 = 1 ; y_0 = 0$
 b) $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} ; I =]0; +\infty[; x_0 = 1 ; y_0 = 1$

Exercice 8 Déterminer la fonction f qui s'annule exactement en un point telle que $f'(x) = x + 1$.

Exercice 9 Déterminer la fonction f qui passe par le point $(-2; 3)$ et telle que $f'(x) = -\frac{x+5}{2}$.

Entraînement technique

Solution 1

a) $F(x) = \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + x + C$

c) $F(x) = 2x + \frac{1}{x}$

e) $F(x) = \frac{1}{2-x} + C$

g) $F(x) = 2\sqrt{x^2-1} + C$

i) $F(x) = \frac{1}{4}(x^2-x)^4 + C$

Solution 2

a) $F_1(x) = -\frac{2}{x} + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$

c) $F_3(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2}$

e) $F_5(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{1}{2}x$

Solution 3

a) $F(x) = -\frac{4}{3(x^3+2)^2} + c$

c) $F(x) = \frac{1}{5-3x^2} + c$

e) $F(x) = \frac{2}{9}(x^3+1)\sqrt{x^3+1} + c$

g) $F(x) = \frac{1}{9}(x^3+2)^3 + c$

i) $F(x) = -\frac{1}{5}\cos(5x) + c$

k) $F(x) = -\frac{1}{8}\cos^4(2x) + c$

m) $F(x) = \frac{1}{3}(x^3-x^2+1)^6 + c$

o) $F(x) = 2\sqrt{4-\cos(x)} + c$

Solution 4

a) $F(x) = 6x + \frac{4}{3}x^6 + c$

c) $F(x) = \frac{3}{5}x^3\sqrt{x^2} + c$

e) $F(x) = -\frac{1}{x^2} + c$

g) $F(x) = \frac{2x^2}{5}\sqrt{x} + c$

i) $F(x) = -\frac{2}{9}(-3x)^{\frac{3}{2}} + c$

k) $F(x) = \frac{1}{6}(9+4x)^{\frac{3}{2}} + c$

m) $F(x) = \frac{1}{2(n+1)}(2x+1)^{n+1} + c$

o) $F(x) = \frac{3x^3\sqrt{x}}{4} + \frac{3}{2}\sqrt{x^2} + c$

b) $F(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + C$

d) $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + C$

f) $F(x) = \frac{4}{3}\sqrt{3x+1} + C$

h) $F(x) = 2\sqrt{x^2+5x-6} + C$

j) $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + C$

b) $F_2(x) = -\frac{1}{2(2x+1)} + \frac{1}{2}$

d) $F_4(x) = -\frac{1}{3(x^3-1)} + \frac{4}{3}$

f) $F_6(x) = -\frac{1}{4x^2} + \frac{5}{4}$

b) $F(x) = \frac{8}{3}\sqrt{x^3+8} + c$

d) $F(x) = -\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{x})^{14}}{7} + c$

f) $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4+x^4} + c$

h) $F(x) = \frac{4}{9}\sqrt[4]{(x^3+2)^3} + c$

j) $F(x) = -\frac{1}{3\sin^3(x)} + c$

l) $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3+\sin(3x)} + c$

n) $F(x) = -\frac{2}{3}\cos(x)\sqrt{\cos(x)} + c$

p) $F(x) = -\frac{2}{(2x^2-1)^2} + c$

b) $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c$

d) $F(x) = \frac{x^6}{2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$

f) $F(x) = \frac{6}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + c$

h) $F(x) = 2\sqrt{x+1} + c$

j) $F(x) = \frac{15}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{2x^2}{5}\sqrt{x} + c$

l) $F(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3-4x} + c$

n) $F(x) = -\frac{1}{6(7+3x)^2} + c$

p) $F(x) = -\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$

Primitives à une constante près

Solution 5 $f'(x) = g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}; \quad c = 2$

Solution 6 a) $F'(x) = G'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2}; \quad C = -4$

b) $F'(x) = G'(x) = \frac{8x^2 - 20x - 13}{(4x - 5)^2}; \quad C = -\frac{1}{2}$

c) $F'(x) = G'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}; \quad C = \frac{3}{2}$

Solution 7 a) $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \frac{7}{12}$

b) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - \frac{5}{2}$

Solution 8 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

Solution 9 $f(x) = -\frac{x^2}{4} - \frac{5}{2}x - 1$