

Série 3

Théorème fondamental du calcul intégral

Entraînement technique

Exercice 1

Donner l'ensemble des primitives de chacune des fonctions suivantes.

$$a) f(x) = \frac{x^2}{(x^3 - 1)^2}$$

$$b) f(x) = \sqrt[3]{1-x}$$

$$c) f(x) = \sin^3(x) \cdot \cos(x)$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ 2-x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$e) f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2}$$

Exercice 2

(Entraînement individuel) Déterminer une primitive de la fonction f définie sur l'ensemble I .

$$a) f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 5x + 1, I = \mathbb{R}$$

$$b) f(x) = \frac{x^3 - 5x + 3}{x^3 + 1}, I = \mathbb{R}$$

$$c) f(x) = 2 - \frac{1}{x^2}, I =]0; +\infty[$$

$$d) f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}, I =]0; +\infty[$$

$$e) f(x) = \frac{1}{(2 - 2x)^2}, I =]-\infty; 2[$$

$$f) f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 1}}, I =]-\frac{1}{3}; +\infty[$$

$$g) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, I =]1; +\infty[$$

$$h) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5x - 6}}, I =]2; 5[$$

$$i) f(x) = (2x - 1)(x^2 - x)^3, I = \mathbb{R}$$

$$j) f(x) = \cos(3x) + \sin(2x), I = \mathbb{R}$$

Exercice 3

(Entraînement individuel) Déterminer la primitive F_i de f_i qui vérifie les conditions données.

$$a) f_1(x) = \frac{2}{x^2} + x \text{ et } F_1(1) = 0$$

$$b) f_2(x) = \frac{1}{(2x^{\frac{1}{2}} - 1)^2} \text{ et } F_2(0) = 0$$

$$c) f_3(x) = \frac{1}{x^3} \text{ et } F_3(-1) = 1$$

$$d) f_4(x) = \frac{1}{(x^3 - 1)^2} \text{ et } F_4(-1) = \frac{3}{2}$$

$$e) f_5(x) = x^2 - 2x - \frac{1}{2} \text{ et } F_5(0) = 0$$

$$f) f_6(x) = \frac{1}{2x^3} \text{ et } F_6(1) = 1$$

Exercice 4

(Entraînement individuel) Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

$$a) f(x) = \frac{8x^2}{(x^3 + 2)^3}$$

$$b) f(x) = \frac{4x^2}{\sqrt{x^3 + 8}}$$

$$c) f(x) = \frac{1}{(5 - 3x^2)^2}$$

$$d) f(x) = \frac{1}{(\sqrt{7} - \sqrt{x})^{13}}$$

$$e) f(x) = x^2 \sqrt{x^3 + 1}$$

$$f) f(x) = \frac{1}{x^3 \sqrt{x}}$$

$$g) f(x) = x^2(x^3 + 2)^2$$

$$h) f(x) = \frac{1}{\cos(x)^{\frac{1}{4}}}$$

$$i) f(x) = \sin(5x)$$

$$j) f(x) = \frac{\sin^4(x)}{\cos(3x)}$$

$$k) f(x) = \sin(2x) \cdot \cos^3(2x)$$

$$l) f(x) = \frac{\cos(3x)}{\sqrt{3 + \sin(3x)}}$$

$$m) f(x) = 2(3x^2 - 2x)(x^3 - x^2 + 1)^5$$

$$n) f(x) = \sin(x) \sqrt{\cos(x)}$$

$$o) f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{4 - \cos(x)}}$$

$$p) f(x) = \frac{16x}{(2x^2 - 1)^3}$$

Exercice 5

(Entraînement individuel) Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{llll} a) f(x) = 6 + 8x^5 & b) f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} & c) f(x) = \sqrt[3]{x^2} & d) f(x) = 3x^5 + \sqrt{x} \\ e) f(x) = \frac{2}{x^3} & f) f(x) = \sqrt{x}(3x - 2) & g) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}} & h) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \\ i) f(x) = \sqrt{-3x} & j) f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{x^2} - x\sqrt{x} & k) f(x) = \sqrt{9 + 4x} & l) f(x) = \frac{1}{\sqrt{3 - 4x}} \\ m) f(x) = (2x + 1)^n, & n) f(x) = \frac{1}{(7 + 3x)^3} & o) f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[3]{x}} & p) f(x) = x\sqrt{1 - x^2} \\ n \in \mathbb{N} & & & \end{array}$$

Primitives à une constante près

Exercice 6

Dériver les fonctions f et g données par :

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \quad g(x) = -\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

Quel lien peut-on en déduire entre f et g ? (Calculer la constante annoncée)

Exercice 7

Déterminer dans chaque cas si les fonctions F et G données sont des primitives de la même fonction sur l'intervalle I . Si oui, déterminer la constante annoncée par le théorème.

$$\begin{array}{ll} a) I =]1; +\infty[; F(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{2x^2 - 3x + 7}; G(x) = \frac{x^2 + 7x - 5}{-4x^2 + 2x - 9} \\ b) I =]\frac{5}{4}; +\infty[; F(x) = \frac{1}{4x - 5}; G(x) = \frac{5 + 3x^2}{10 - 8x} \\ c) I = \mathbb{R}; F(x) = \frac{1}{x^2 + 1}; G(x) = \frac{1}{2(1 + x^2)} \end{array}$$