

Série 5

Techniques d'intégration

Théorème de la moyenne (suite)

Exercice 1

Déterminer la valeur moyenne de f sur $[a; b]$ et le nombre c annoncé par le théorème de la moyenne pour chacune des intégrales suivantes :

a) $\int_{-2}^3 (2x + 4) dx$

b) $\int_1^2 \frac{-1}{\sqrt{2x-3x^2}} dx$

c) $\int_0^2 x^2 dx$

d) $\int_0^3 \frac{x^3 - 3x^2 + x}{x} dx$

Exercice 2

Soit $f(x) = x^2 - x$. Déterminer le nombre b tel que 2 soit la valeur moyenne de f sur $[0; b]$.

Problèmes d'accumulation et valeurs moyennes

Exercice 3

Un réservoir se vide avec un débit volumique

$$d(t) = 90 - 2t - \frac{t^2}{4}$$

en litres par seconde, pour t compris entre 0 et 12 secondes.

- Calculer le débit volumique moyen entre $t = 0$ et $t = 12$.
- Si le réservoir est plein au temps $t = 0$ et se vide en 12 secondes, combien de litres contient-il lorsqu'il est plein ?

Exercice 4

Entre 10 h et 16 h, la puissance solaire reçue par un mètre carré de panneau est modélisée par

$$p(t) = 500 + 120t - 20t^2$$

en watts par mètre carré, où t est le nombre d'heures écoulées depuis 10 h et $0 \leq t \leq 6$.

- Calculer la puissance solaire moyenne reçue par mètre carré entre 10 h et 16 h.
- Calculer l'énergie solaire reçue par 1 mètre carré de panneau pendant ces 6 heures, en wattheures.
- Un panneau de 2 mètres carrés transforme 20% de cette énergie en électricité. Quelle énergie électrique produit-il, en kilowattheures ?

Exercice 5

Lors d'un trajet court, la vitesse d'un vélo électrique est modélisée par

$$v(t) = 4 + 2t - \frac{t^2}{4}$$

en mètres par seconde, pour t compris entre 0 et 8 secondes.

- Calculer la vitesse moyenne du vélo pendant ces 8 secondes.
- Calculer la distance parcourue pendant ces 8 secondes.
- Si le vélo continue ensuite pendant 12 secondes à vitesse constante égale à la vitesse moyenne trouvée en a), quelle distance parcourt-il en tout ?

Calculs d'intégrales (suite)

Exercice 6

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-2}^{-1} \frac{3x^2 - 5x}{x^4} dx$

c) $\int_0^1 (x^2 - 1)(x^3 - 3x)^4 dx$

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\sin(x) \cos(x) dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x) - \sin(x)}{(\sin(x) + \cos(x))^2} dx$

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

c) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x^4 + 4x + 4)^2} dx$

b) $\int_0^3 (x^2 - 1)^2 dx$

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{0\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{3} dx$

Exercice 8

(Entraînement individuel) Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^2 (1 - x)^3 dx$

b) $\int_{\frac{1\pi}{3}}^2 \frac{x^3 + 2}{x^2} dx$

c) $\int_{-1}^1 x^2(x^3 + 2)^2 dx$

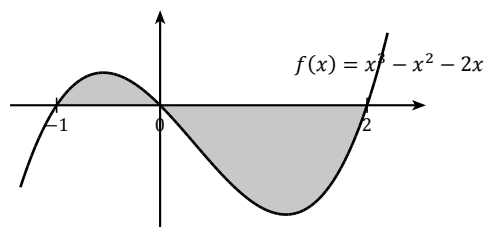
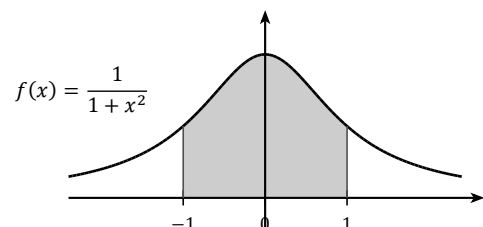
d) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} dx$

e) $\int_0^{\frac{1\pi}{3}} \frac{1}{1 + \cos(2x)} dx$

Calculs et interprétation

Exercice 9

On donne une fonction f et son graphique :



Indication : une primitive de $x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$ est $x \rightarrow \arctan(x)$.

Calculer dans chacun des deux cas l'aire du domaine ombré.

Exercice 10

Vérifier que $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont des primitives de f dans le cas où :

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \quad ; \quad F_1(x) = \frac{x}{x+1} \quad ; \quad F_2(x) = -\frac{1}{1+x}$$

À l'aide de chacune de ces deux primitives, calculer :

$$\int_2^3 \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

Déterminer la constante dont diffèrent ces deux primitives.